طرائق المنطق



ويلارد فان أورمان كواين

ترجمة: د. يوسف تيبس

معنى
MANA

طرائق المنطق

ويلارد فان أورمان كواين

ترجمة: د. يوسف تيبس

معنى



طرائق المنطق
تأليف: ويلارد فان أورمان كواين
ترجمة: د. يوسف تيبس
الطبعة الأولى: 2023
لوحة الغلاف: عبد الوهاب عطيف
ISBN: 978-603-91637-4-9
رقم الإيداع: 1443/1126
هذا الكتاب ترجمة لـ:
Willard Van Orman Quine, *Methods of Logic*
(Fourth edition, 1982) Harvard University press, 1982.

Cover Painting by: Abdulwahab Otaif

الآراء والأفكار الواردة في الكتاب تمثل وجهة نظر المؤلف



الناشر:
دار معنى للنشر والتوزيع
الرياض - المملكة العربية السعودية

www mana net | info@manaa net | @manaplatform

المحتويات

توطئة

يهدف هذا الكتاب إلى تبليغ فهم دقيق لمفاهيم المنطق المعاصر الصورية وإلى تطوير طرائق استدلال صوري ملائمة. لقد تطوَّر هذا الكتاب خلال طبعاته المتتالية. بلغت الأجزاء التي يُمكن إغفالها دون الإضرار بفهم النظرية المنطقية الأساسية الآن إلى حوالي ثلث الكتاب. لقد وضعتها بين معقوفين حتى يُمكن تخطيها بسهولة، كليًا أو انتقائيًا، بغرض تقديم درس مختصر. لكنني في تدريسي الشخصي، كنتُ دائمًا أغطّي الكتاب بأكمله، في طبعاته السابقة، خلال فصل دراسي.

في الطبعة الثانية، 1959، كان التحسينان الرئيسان هما: جعل البرهان على سلامة نسقي للاستنباط الطبيعي أكثر قابلية للقراءة، وفي الملحق، براهين على التمام ونظرية لوفينهايم (Löwenheim).

مثّلت الطبعة الثالثة، 1972، تحوّلًا أكثر جذرية: كتاب جديد بمقدار النصف. إذ تكاثرت فيه عمليات البرهنة وعمليات البتّ، وقدّمت حزمة من البدائل. هكذا وأنا أقارب البنية المنطقية من زوايا متعددة شعرت أنني أنقاد إلى فهم أعمق.

كانت طريقتي الأساسية، كما أسميتُها، في نظرية التسوير بسيطة بشكل ملحوظ ويمكن تعليلها بسهولة وكانت استراتيجية كقاعدة يُمكن من خلالها تطوير مجموعة من الطرائق البديلة. كما أقررتُ بإثبات برهان تمام سهل نسبيًا. وَفقًا لذلك، تم اختصار نسق الاستنباط الطبيعي الخاص بي، والذي كان قد هيمن على الطبعتين الأوليين؛ ولم يُمنح، في الطبعة الثالثة، سوى

معالجة موجزة في الجزء الذي يُمكن إغفاله. واستجابة الآن للأساتذة الذين أحبوا هذا النسق وتأسفوا على اختصاره، قمتُ في هذه الطبعة الجديدة باستعادة معالجته الكاملة، على الرغم من أنه لا يزال قابلًا للإغفال.

كان التحول الرئيس الآخر في تلك الطبعة الثالثة هو تأجيل الأسوار عن طريق تطوير المنطق الواحدي على منوال جورج بول على الرغم من عدم التسليم بالفئات. في هذه الطبعة الجديدة، قمتُ بمزيدٍ من التركيز على الفكرة من خلال استغلال ترميز نظرية المجموعات لتجريد الفئات دون التسليم بالفئات. تنبثق المجردات بكل براءة من الجمل الموصولة. تُعمل الحيلة في معالجة الإنابة، وتوضّح الطابع الضميري للمتغيرات المُقيَّدة، وتتم من منظور فلسفي مقبول حول الفئات. يُمكن الاطلاع على مزيد من التوضيح حول المتغيّر المقيد في فصل قابل للإلغاء حول العوامل التوافقية.

كانت هناك مواضع حيث أفسّر نقاطًا في كتبي السابقة بحاجة إلى تفسير جديد بالطريقة القديمة نفسها. قمت في هذه النقاط بتكييف أمثلة ومقاطع توضيحية من كتبي **المنطق الرياضي** (*Mathematical logic*) و**المنطق الأولي** (*Elementary Logic*) و**معنى المنطق الجديد** (*O Sentido da nova lógica*)، مفضلًا عدم إخفاء نقاط الاتصال الأصلية من خلال تبديلات عينية للأمثلة أو التشارح. لكن هذه النقاط قليلة. يعتمد الفصل الأول جزئيًا على الفصل السادس من **معنى المنطق الجديد**، كما يعتمد الفصل الخامس جزئيًا على الفصل الثاني من **المنطق الرياضي**. في الفصول 4 و8 و14 و31، اقتبست أمثلة من **المنطق الأولي** لكن تناولها هنا يتم بشكل مختلف.

من منطلق الولاء للمعلِّمين المخلِصين لهذا الكتاب، كنتُ مُترددًا في الابتعاد عن ترميزات الدوال الصدقية والأسوار التي ورثتها عن وايتهيد (Whitehead) وراسل (Russell). لكنني في هذه الطبعة فعلت أخيرًا ذلك.

انتقلتُ إلى رموز أخرى أصبحت رائجة بشكل متزايد تخص رابطي الشرط والتشارط والتسوير الكلي. لم أقم بهذه الخطوة استجابة للموضة فقط، بل لأسباب تقنية ستتم الإشارة إليها عند ظهور الرموز.

كان تحرير نسخ هذه الطبعة –جزئيًا- بسبب تغيير الترميز صعبًا بشكل غير عادي. أنا ممتن لكاترينا رايس (Katarina Rice) من منشورات جامعة هارفارد على عملها المتبصر والدقيق.

مقدمة

يهتم المنطق، كجميع العلوم، بالبحث عن الصدق. ما يصدق هو بعض العبارات، والبحث عن الصدق هو السعي إلى تمييز العبارات الصادقة عن غيرها، أي العبارات الكاذبة.

يتساوى عدد العبارات الصادقة والكاذبة لأن كل عبارة كاذبة يكون نفيها صادقًا. غير أن النشاط العلمي ليس تراكمًا أعمى للحقائق؛ فالعلم انتقائي يبحث عن الحقائق الأكثر أهمية، إما من حيث فائدتها الذاتية، وإمّا لأنها أدوات تمكننا من مواجهة العالم.

بعبارة أدقّ، لا ينطبق الصدق والكذب على العبارات باعتبارها صيغَ تلفّظٍ قابلةً لإعادة الاستعمال، بل تنطبق على وقائع فردية تتمثل في التلفظ بالعبارات. يُمكن للملفوظات تبدو متشابهة أن تختلف في الدلالة بحسب مناسبة التلفّظ نفسه. وذلك ليس بسبب الالتباسات التي نغفلها فحسب، بل بسبب تلك الالتباسات المنتظمة التي تعد جوهرية في طبيعة اللغة. يغيّر الضمير «أنا» إحالته كلّما تغيّر المتكلم، وتتغير إحالة «هنا» عند كل تحرك أو انتقال ملحوظ في المكان، كما تتغير إحالة «الآن»، في كل لحظة يتم النطق بها.

يجب أن نبحث إذًا عن نقطة الالتقاء الحاسمة بين الوصف والواقع عند التلفظ بعبارة خلال تجربة ينقلها التلفظ بتلك العبارة بمناسبة إثارة ترتبط بتلك المتوالية من الكلمات. لا تحيل العبارة على الإثارة أو الإحساس، بل تحيل على المواضيع الفيزيائية. إن اللغة مؤسسة اجتماعية تستعمل، في

إطار حدودها، لغاية التواصل الاجتماعي، ولذلك لا ينبغي أن نتعجب من كون مواضيع ملفوظاتنا الشفاهية الأكثر أولوية وشيوعًا مواضيع فيزيائية نتشاركها اجتماعيًا وليست تجارب خاصة... لو لم تكن المواضيع الفيزيائية موجودةً لاضطررنا (بتعبير فولتر الساخر) إلى اختراعها. إنها ضرورية باعتبارها القواسم المشتركة للتجربة الحسّيّة الخاصّة.

يعدّ الإقرار العلمي الحديث حول البوزيترونات (positrons) والقول بأن قلمي بيدي عبارتين تتعلقان بموضوعات فيزيائية، ولا تعرف هذه الأخيرة إلا باعتبارها أجزاء من بنية مفاهيمية منتظمة تلامس، متى نظرنا إليها في كليتها، محيط التجربة. لدينا شبكة من العبارات التي ترتبط ببعضها بشكل مختلف. ويرتبط بعضها، في محيط الشبكة، بقوة أكبر أو أقل بالإثارة الحسية. وحتى تلك الموجودة في المحيط تتعلق في الغالب بالمواضيع المادية: مثال ذلك «قلمي في يدي»، «الزئبق في درجة 80».

يثير التحفيز الحسّي عبارة ما مرتبطة ارتباطًا وثيقًا، ثم يتردد صدى الارتباطات في نسق العبارات، مما يؤدي إلى تنشيط عبارة محيطة أخرى تجعلنا ارتباطاتها الحسية نتوقع بعض الإثارة الإضافية الخاصة. هذه، بشكل مختصر، هي آلية التنبؤ. عندما يفشل التنبؤ، نتساءل عن شبكة العبارات المتدخِّلة. إننا نحتفظ بخيار واسع في ما يتعلق بعبارات النسق التي يجب الاحتفاظ بها وتلك التي يجب مراجعتها؛ تكفي أي مراجعة من بين العديد من المراجعات للتخلّص من اللزوم الخاص الذي تسبب في وَهَن النسق.

عادة ما يتم تحصين العبارات المحيطة، المرتبطة ارتباطًا وثيقًا بالمثيرات، من المراجعة بمجرد حدوث الإثارات المناسبة. وإذا صارت مراجعة النسق ضرورية، لزم أن تعاني عبارات أخرى. يُمكن أن نأمل، عبر تخصيص أولويات من هذا القبيل فقط، في المطالبة بأي مضمون تجريبي أو إحالة

موضوعية على النسق في كليته.

توجد، مع ذلك، أولوية أخرى مخالفة إلى حد ما، مفادها: كلما كان القانون أساسيًّا، بالنسبة إلى خطاطتنا المفهومية، نكون أقل اضطرارًا لاختيارنا مراجعته؛ وعندما نضطر إلى مراجعة نسق عباراتنا، نفضل أن نقوم، وإن تساوى الأمر مع غيره، بمراجعة لا تشوش على النسق قدر الإمكان.

إذا تنازعت الأولويتان، يُمكن ترجيح إحداهما. يُمكن أحيانا ترك عبارات قريبة من التجربة، وإن بدَتْ متحققةً بواسطة تجارب ملائمة، ولو دفاعًا عن الهلوسة، في الحالة القصوى التي قد يقود الاحتفاظ بها إلى مراجعة كارثية للقوانين الأساسية. بيد أن نقض هذه الكثرة من العبارات من شأنه أن يعرضنا للنقد خصوصًا إذا كانت هذه العبارات يعزز بعضها بعضًا ومدعومة من قبل ملاحِظين مختلفين.

إذا نظرنا الآن إلى أولوية القانون، بعيدًا عن التنافس مع أولوية العبارات المتحققة تجريبيًّا، نجدها تقبل بدرجات عديدة. تقبل التخمينات المتعلقة بعلمي التاريخ والاقتصاد المراجعة تلقائيًّا أكثر من القوانين الفيزيائية، وهذه الأخيرة تقبل المراجعة تلقائيًّا أكثر من القوانين الرياضية والمنطقية. يستفيد نسق عباراتنا، بالنظر إلى التجربة، من هذا الهامش من امتناع التحديد، بحيث يُمكن أن نعتبر بسهولة مجالات واسعة من القوانين محصنة مبدئيًّا من المراجعة. وعندما تضطرنا تجارب غير متوقعة إلى المراجعات، نلجأ إلى أجزاء أخرى من نسقنا. تنحو الرياضيات والمنطقيات، باعتبارها مركزية في خطاطتنا المفهومية، إلى اعتبار نفسها تحوز مثل هذه الحصانة نتيجة تفضيلنا المحافِظ للمراجعات التي تربك نسقنا بأقل قدر ممكن؛ ربما تكمُن في هذا الموضع «الضرورة» التي نشعر أن القوانين الرياضية والمنطقية تتمتع بها.

وأخيرًا قد يكون من نافل القول أن ندعي، كما يفعل المرء دائمًا، أن

القوانين الرياضية والمنطقية تصدق بفضل خطاطتنا المفهومية فقط. إذ لا شك أنها بفضل هذه الخطاطة توجد هذه القوانين في مركزها؛ وبفضل هذا الموقع المركزي تُصان قوانينها من المراجعة على حساب العبارات المتموقعة استراتيجيًا في درجة أدنى.

ومع ذلك، ينبغي أن نلاحظ الآن أن تفضيلنا المحافظ للمراجعات التي تربك نسقنا، بأقل قدر، يواجه قوة مضادة مهمة، أقصد قوة التبسيط. لقد توقفت المراجعة الواسعة للقوانين الفيزيائية الأساسية في العقود الأخيرة، نظرا لاعتبارات البساطة، وذلك بدل الوقوع في فوضى القوانين المساعدة العَيْنِية التي يفترض أن نحتاجها للتكيُّف مع التجارب المعانِدة المُنجَزة من قبل مايكلسون وموري (Michelson and Morley) وغيرهما من العلماء التجريبيين. «أكدت» التجارب الموالية المراجعات الأساسية، بمعنى زيادة البَوْن في البساطة.

ليست القوانين الرياضية والمنطقية نفسها بمنأى عن المراجعة إذا تبيّن أن التبسيطات الأساسية لخطاطتنا المفهومية برمتها تنجم عنها. وقدمت اقتراحات، يعود أغلبها إلى المآزق التي شهدتها الفيزياء المعاصرة، تشرع مراجعة ثنائية الصدق والكذب المنطقية لصالح نوع من المنطق الثلاثي أو النوني القيم. تمثل القوانين المنطقية العبارات الأكثر تمركزًا وحسمًا في خطاطتنا المفهومية، ولهذا السبب تكون الأكثر حصانةً من المراجعة بفضل قوة النزعة المحافظة. بَيْد أنها تكون، دائمًا بسبب وضعها الحاسم، القوانين التي يُمكن أن ينتج عن مراجعتها الملائمة التبسيط الجذري لنسق معرفتنا برمته.

هكذا يُمكن للقوانين الرياضية والمنطقية، بالرغم من «ضرورتها»، أن تُبطَل. غير أن قول ذلك لا ينفي أن هذه القوانين تصدق بفضل خطاطتنا المفهومية، أو بفضل دلالاتها. الحقيقة أن مركزية هذه القوانين بلغ درجة عالية بحيث تبدو مراجعتها تبنّيًا لخطاطة مفهومية جديدة، أو إسنادًا

لدلالات جديدة إلى كلمات قديمة. لا ينتظر من هذا الكتاب، بالمناسبة، مثل هذه الثورة: سيجد القارئ في صفحاته جدة التناول والتقنية، لكن أساس المنطق سيظل من دون تغيير.

لا ترتبط عباراتنا في جزء كبير منها، كما أكدنا على ذلك، بالتجربة إلا عن بعد فقط. وحدها العلاقات بين العبارات تدفع العبارات التي توجد داخل النسق إلى الظهور تمامًا في مستوى التنبؤ التجريبي، وقد تبدو جديرة بالمراجعة كلما فشل هذا التنبؤ. والحال أن إحدى العلاقات الوحيدة والمهمة بسبب فائدتها، من بين هذه العلاقات التي توجد بين العبارات، هي علاقة اللزوم المنطقي، أي علاقة كل عبارة بالعبارات التي تلزم عنها منطقيًا. فإذا سلَّمنا بأن عبارة ما صادقة، وجب أن نعتبر كل عبارة لازمة عنها صادقة أيضًا، وبهذه الكيفية يكون للعبارات التي تقع داخل النسق أثر على العبارات التي توجد في المحيط.

سيكون نسق عباراتنا من دون اللزوم، في جزء كبير منه، خاليًا من الدلالة، أي لا شيء له معنى باستثناء المحيط. غير أن اللزوم ليس في الحقيقة عاملًا إضافيًا، لأن القول بأن عبارة تستلزم منطقيًا أخرى، يماثل القول بأن عبارة ثالثة تنتمي إلى النسق نفسه، ومصوغة بالرابط «إذا... فـ» تجمع بين عبارتين أخريين، تكون صادقة منطقيًا أو «صحيحة». إن الحقائق المنطقية عبارات لها الطبيعة نفسها التي لغيرها، بَيْد أنها توجد في المركز بالضبط؛ وهي عبارات ذات صيغ من قبيل: «ب أو لا ب»، و«إذا ب فإن ب»، و«إذا ب وجـ إذًا جـ»، و«إذا كان كل شيء على هذا الحال وذاك، فإن بعض الشيء يكون على الحال وذاك». وتوجد عبارات أخرى أكثر تعقيدًا ولا تقبل التعرف عليها بسرعة. ميزة هذه العبارات أنها ليست صادقة فحسب، بل تظل صادقة حتى وإن قمنا بالإنابات التي نرضاها على الكلمات والجمل التي تتركب منها، شريطة فقط ألّا تتغير الكلمات التي نسمها

الكلمات «المنطقية» نحو «=» و«أو» و«لا...» و«إذا...فـ»، و«كل» و«بعض» إلخ. نستطيع أن نكتب أي عبارة في موضع «ب» و«جـ» وأي حد في موضع «على هذا الحال وذاك»، على منوال الصيغة المذكورة أعلاه، دون أن نخشى إنتاج الكذب. إن ما يهم عندما تكون عبارة ما صادقة منطقيًا، هو بنيتها من حيث كلماتها المنطقية. ولهذا السبب نقول عموما تصدق الحقائق المنطقية بفضل دلالات الكلمات المنطقية وحدها.

تكمن أهمية المنطق الرئيسة في اللزوم الذي سيكون بذلك الموضوع البارز لهذا الكتاب. هناك تقنيات تكون ضرورية لتبيان أن عبارة، متى تعلق الأمر بعبارتين، تلزم عن أخرى: هنا يكمُن الاستنباط المنطقي. سنطور هذه التقنيات، تدريجيًا بحسب ما يسمح به تنظيم الكتاب، في أقسام يتزايد غناها في المنطق. إن مواضيع الاستنباط، أي الأشياء التي تترابط باللزوم، هي العبارات، لذا لن تشكّل هذه العبارات، بالنسبة إلى هذا الكتاب، هيكلَه فحسب (كما هو الحال بالنسبة إلى معظم الكتب)، بل تُعتبَر موضوعه الأوّلي.

بعبارة أدقّ، ليست العبارات هي التي تحتمل الدلالة والصدق والكذب، كما بيّنا سابقًا، بل الوقائع المفردة التي تُقرُّها العبارات. ومع ذلك، يعدّ الحديث عن العبارات المجردة عن سياقات التلفظ بها مصدرًا كبيرًا للتبسيط في النظرية المنطقية. ومتى تم هذا التجريد بوعي تام وبحذر معين، لن يخلق أية صعوبة. يكمُن الحذر ببساطة في ضرورة عدم تطبيق التقنيات المنطقية على الأمثلة التي ترد فيها العبارة نفسها أكثر من مرة بمعانٍ مختلفة بسبب تنوع السياقات المباشرة. يسهُل تكييف أمثلة من هذا القبيل بشكل أسهل مع أغراض المنطق بواسطة تشارح تمهيدي يتجلّى في إظهار معنى الانزياحات المضمرة (انظر، الفصل 8).

يشترك المنطق والرياضيات، حسب الملاحظات السالفة، في كونهما

يحتلان موقعًا مركزيًا داخل النسق الكلي للخطاب. يبدو أن المنطق كما يقدم لنا عادة، وعلى الخصوص كما سنقدمه في هذا الكتاب، مختلفًا عن الرياضيات من حيث إننا نتحدث في المنطق عن العبارات والعلاقات المتبادلة بينها، وبالأخص عن اللزوم، في حين نتحدث في الرياضيات عن أشياء غير لسانية ومجردة من قبيل: الأعداد والدوال وما إلى ذلك. غير أن هذا التباين مضلِّل في جزء كبير منه. مناط ذلك أن الحقائق المنطقية ذات الصيغة «إذا ب وجـ إذًا جـ» مثلًا، لا تتعلق بالعبارات، بل يُمكنها أن تتعلّق بأي شيء، إذ يتوقف الأمر على العبارات التي نضعها في المواضع الفارغة «ب» و«جـ». عندما نتحدّث عن مثل هذه الحقائق المنطقية، وعندما نشرح اللزومات، فإننا نتحدث حقًّا عن العبارات؛ بَيْد أنَّ الأمر نفسه يحدث عندما نتحدث عن الحقائق الرياضية أيضًا.

تتناول الحقائق الرياضية حقًّا الأشياء غير اللسانية والمجردة كالأعداد والدوال بشكل صريح، في حين لا يكون للحقائق المنطقية، بالمعنى الضيّق للفظ «المنطق»، مثل هذه الكائنات كمواضيع خاصة بها. وذلك فرق كبير بينهما. غير أن هذا الفرق لا يمنعنا من تبيُّن أن المنطق، في أعلى مستوياته، يقودنا إلى الرياضيات عبر مراحل طبيعية. قد تحدث في الواقع بعض التوسيعات غير الملحوظة في نظرية المنطق تقودنا إلى مملكة تُسمَّى أحيانًا «المنطق» أيضًا بالمعنى الواسع للكلمة، تكون مواضيعه كائنات مجرّدة من نوع خاص. وليست هذه الكائنات سوى الفئات. لقد تبيّن أن النظرية المنطقية للفئات أو نظرية المجموعات هي العلم الأساسي للرياضيات الخالصة، إذ يُمكن أن نشتق منها الرياضيات الكلاسيكية برمّتها، كما نعلم من خلال أعمال كل من فريغه (Frege) وديدكند (Dedekind) وفايرشتراس (Weierstrass) وأعمال تابعيهم في أواخر القرن التاسع وبعده. سنكون قد تدرّجنا، قبل نهاية الكتاب، عبر أربعة مستويات من المنطق بالمعنى الضيق

للكلمة، ليفضي بنا المسار إلى نظرية المجموعات؛ عندئذ سنلحظ، كأمثلة على الاشتقاق من الرياضيات الكلاسيكية، كيف يُمكن تعريف مفهوم العدد ومختلف المفاهيم المشابهة له.

الباب الأول

الدوال الصدقية

1 النفي والوصل والفصل

تتميز العبارات عن باقي الصيغ اللغوية بكونها تحتمل الصدق والكذب، كما يُمكن إثباتها ونفيها دلاليًا. يدل نفي عبارة ما على إثبات عبارة أخرى تكون نفيًا أو نقيضًا للأولى. فنفي العبارة «تاج محل أبيض» يعني إثبات العبارة «تاج محل ليس أبيضَ». لنلاحظ أن هذا النفي يتقابل مع النفي الأصلي، ليس كتقابل الأسود والأبيض، بل كتقابل اللاأبيض والأبيض: إذ يُعتبَر صادقًا بالنسبة إلى كل الحالات باستثناء حالة البياض.

إن الأسلوب المعتاد في نفي العبارات في اللغة العادية هي إدخال «ليس» (أو أي أداة نفي) على الفعل الرئيس[1]، كما هو الشأن في المثال السابق. وإذا كان الفعل مقيدًا بـ «أحيانًا» و«دائمًا»، فإن النفي يتم عبر استبدالهما بـ «مطلقًا» أو «ليس دائمًا». وإذا كانت العبارة مركبة لا تتوفّر على فعل رئيس، وجب التعبير عن نفيها بصيغة أكثر إتقانًا، مثل «مِن الكذب أن... وأن...». غير أنه رغم هذه الحالات الخاصة في اللغة الطبيعية، فإنّ القليل من الانتباه كافٍ لصياغة نفي واضح لعبارة معطاة وفق المبدأ الموجه الآتي: يجب أن تعتبر العبارة المنفية كاذبة إذا كانت العبارة الأصلية صادقة، وأن تُعتبَر صادقةً في جميع الأحوال، أيًا كانت، التي تكون فيها العبارة المعطاة كاذبة.

(1) يدخل النفي في اللغات الهندوأوروبية على الفعل المساعد الذي يربط بين الصفة والموصوف (المسند والمسند إليه) في حين لا توجد مثل هذه الرابطة في اللغة العربية لا ظاهرة ولا مضمرة [المترجم].

من المناسب في المنطق أن نستعمل رمزًا واحدًا يدل على النفي يكون في بداية العبارة: «¬»[1]، ندخله على العبارات برمّتها. هكذا تعني العبارة «¬(جونز غائب)» «جونز ليس غائبًا»؛ توضع الأهلة هنا للتجميع، في مجموع موحّد، العبارة التي ندخل عليها «¬». ويُمكن أن نترجم الرمز «¬» لغةً إلى «من الكذب أن»، ويُقرأ اختصارًا «ليس». وعندما نرمز لعبارة ما بحرف واحد «ب»، كما يحدث عادة في المناقشات المنطقية، يوضَع رمز النفي فوق الحرف، وليس أمامه، لذا سنكتب الصيغة «¬ب» عوض «بَ̄» بالنسبة إلى نفي «ب»[2].

بدل أن نثبت كل عبارة من العبارات على حدة بإمكاننا أن نثبت، باعتماد التكافؤ، عبارةً واحدةً يصطلح عليها المناطقة (خلافًا للنحاة) بوصل العبارات المعطاة. يتم الوصل بين عبارتين، أو أكثر عادة في اللغة العربية باستعمال حرف الوصل «و» بين الجمل، أو باستعمال الفاصلة أو هما معًا نحو: «يولد البعض عظيمًا، يبلغ البعض العظمة، ويبدو للبعض أن العظمة قدِّرت عليهم». من الأفضل، في البحوث المنطقية، أن نعبر ببساطة عن الوصل عبر كتابة العبارات الوصلية متجاورة نحو: «(يولد البعض عظيمًا) (يبلغ البعض العظمة) (يبدو للبعض أن العظمة قدِّرت عليهم)» حيث تمثل الأهلة علامة لتعيين وحدات العبارات المكوِّنة للعبارة الوصلية في كليتها: هب أنّ «ب»، و«جـ» و«د» عبارات، فإننا نستطيع التعبير عن وصلها كالآتي: «ب٨ جـ٨ د»[3].

(1) يستعمل كواين هنا الرمز «~» بجانب الحرف القضوي (قبله)، لكننا فضلنا الرمز «¬» حتى لا يخلطه القارئ غير المتخصص برمز ناقص في الحساب. [المترجم]

(2) قلبت تعبير كواين هنا لأنني فضلت استعمال الرمز الذي يتصدر العبارة، أي وضع رمز النفي في بداية العبارة: «¬ ب»، بدل الذي يوضع فوقها تسهيلًا للكتابة والطباعة العربيتين، والحال أن كواين يفضل استعمال رمز النفي الذي يكون عبارة عن خط صغير فوق الحرف القضوي/ العباري. [المترجم]

(3) لا يستعمل كواين هنا رمز الوصل «٨»، بل يكتفي بوضع رموز المتغيرات القضوية متجاورة (pqr) =

وتختصر دلالات النفي والوصل في القوانين الآتية: يكون نفي العبارة الصادقة كاذبًا؛ ونفي العبارة الكاذبة صادقًا؛ ويكون وصل العبارات الصادقة صادقًا؛ ويكذب وصل العبارات متى كذبت على الأقل إحدى العبارات الموصولة.

نلحظ مباشرة أن (النفي المزدوج) «¬¬ب»، الذي هو نفي للعبارة «¬ب»، يصدق إذا وفقط إذا كانت «¬ب» كاذبة؛ وبالتالي إذا وفقط إذا كانت «ب» صادقة. ومن ثم لا فائدة من كتابة النفي المزدوج «¬¬ب» ما دام يُكافئ ببساطة «ب». ومن البديهي أنّ «ب ∧ ب» تُكافِئ «ب» أيضًا.

هب الآن أن لدينا العبارة المركبة: ب∧ (جـ ∧ د). فإنها تعبر عن الوصل بين «ب» و«جـ ∧ د» الذي يصدق إذا وفقط إذا كانت «ب» و«جـ ∧ د» صادقتين معًا. أي ستكون العبارة «جـ ∧ د» بدورها صادقة إذا وفقط إذا صدقت «جـ» و«د» معًا. يلزم عن هذا أن العبارة «ب ∧ (جـ∧ د)» لا تصدق إلا إذا صدقت «ب» و«جـ» و«د» معًا. بعبارة أخرى، يُكافئ الوصل الثلاثي «ب ∧ (جـ ∧ د)» ببساطة العبارة «ب∧ جـ ∧ د». ويمكن أن نلاحظ بالطريقة نفسها تكافؤ العبارة الوصلية «(ب ∧ جـ) ∧ د» ببساطة مع العبارة «ب∧ جـ ∧ د». لذا نستطيع أن نحذف الأهلة ونكتب دائمًا «ب∧ جـ ∧ د»، باعتبارها وصلًا بين «ب∧ جـ» و«د»، وكوصل بين «ب» و«جـ ∧ د»، وكوصل بين «ب» و«جـ» و«د». يعتبر الوصل في مجال الرياضيات تجميعيًّا: فالترتيب الداخلي في «ب∧ جـ ∧ د» غير أساسي، تمامًا كما هو حال المجموع «سـ + ع + ف» أو حاصل ضرب «سـ × ع × ف» في الحساب. غير أن الوصل يتعارض مع عملية القسمة في الحساب، ذلك لأننا نلاحظ أن الأهلة في العمليتين الحسابيتين: «12 ÷ (6÷2)» و«(12÷6)÷ 2» تصنع الفرق بين 4 و1.

= لأن الأحرف الهندوأوروبية تسمح بذلك، كما أن كتابة الأحرف بهذه الطريقة تدلّ على الضرب، لذا فضلنا إبراز رمز الوصل «∧» تجنبًا للالتباس والتصاق الحروف العربية. [المترجم]

في الوقت الذي يعلِّل قاعدة التركيب. بالنسبة إلى الجمع والضرب والوصل، حذف الأهلة. يجب ألّا يُنسينا هذا الحذف أن القاعدة تظل قائمة هنا وفعالة. يُمكننا أن نعتبر بحق الترميز «ب ∧ جـ ∧ د» للوصل الثلاثي اختصارًا خاصًا واعتباطيًا (إذا جاز القول) لـ «(ب ∧ جـ) ∧ د». وفي هذه الأحوال، عندما نعالج عمليًا «ب ∧ جـ ∧ د» باعتبارها «ب ∧ (جـ ∧ د)» أيضًا، فإن ما يحدث بدقة هو بالأحرى تحوّل منطقي من «(ب ∧ جـ) ∧ د» إلى مكافئها «ب ∧ (جـ ∧ د)».

توجد خاصية أخرى يشترك فيها الوصل والجمع والضرب، ويختلف فيها عن القسمة، وهو كونه تبديليًا؛ مما يعني أن الترتيب غير مهم إذ لا حاجة للتمييز بين العبارتين «ب ∧ جـ» و«جـ ∧ ب».

بَيْد أن الوصل يتمتع بخاصية ثالثة ملائمة، كما أشرنا أعلاه، لا يتشاركها مع الجمع والضرب، أعني إمكانية اختزال «ب ∧ ب» إلى «ب». وهو ما نصطلح عليه بالقول إنّ الوصل متكافئ القوة. يُمكن أن نختصر خصائص الوصل الثلاث مجتمعةً، ببساطة في ما يلي: كلما قمنا بجرد كل المكونات المتباينة لوصل متصل، لن نهتم بأي من الأجزاء الأخرى المكوِّنة للوصل.

بعد الحديث عن النفي والوصل اللذين يتطابقان مع «ليس» و«و»، ننتقل إلى طريقة ثالثة لإنشاء عبارات من عبارات أخرى. وتُسمّى طريقة **الفصل** الذي نعبّر عنه بالرابط «أو»، أو «إما...وإما». يستعمل هذا الرابط في اللغة الطبيعية بطرق متباينة: أحد هذه الاستعمالات الفصل الضعيف (غير الاستبعادي)[1]، والذي تكون العبارة المركبة به صادقة متى صدق أحد المفصولين على الأقل. وفق هذا الاستعمال تكون العبارة:

(1) أتبع في هذا كولي (cooley) الذي يفضل هذا المصطلح المركب على المصطلح الأكثر تداولاً: «تضمني (inclusive)» لأنه مُضلِّل.

(إما) أن جونز مريض أو أنَّ سميث بالخارج

صادقة إذا كان جونز مريضًا وكان سميث بالخارج، وتصدق أيضًا إذا لم يكن جونز مريضًا وكان سميث بالخارج؛ كما تصدق إذا كان جونز مريضًا ولم يكن سميث بالخارج؛ وتكذب في حالة واحدة فقط: إذا لم يكن جونز مريضًا وسميث ليس بالخارج. يصطلح على المعنى الثاني الذي تُستعمل فيه «أو»، في بعض الأحيان، بالفصل القوي (الاستبعادي)، والذي لا تصدق وفقه العبارة الفصلية إلا إذا وفقط إذا صدق أحد المفصولين فقط. وطبقًا لهذا المعنى الذي نسنده إلى «أو»، لا تكون العبارة الفصلية كاذبة إذا كذب المفصولان معًا فقط، (جونز ليس مريضًا وسميث ليس بالخارج)، بل يكذب أيضًا عندما يكون المفصولان صادقيْن أيضًا (جونز مريض وسميث بالخارج).

يتم عادة تجاوز الالتباس الخاص بالحرف «أو» في اللغة العادية عندما نضيف المادتين المعجميتين «أو الأمران معًا»، أو «ليس الأمران معًا». وبذلك، نستطيع أن نصوغ الفصل غير الاستبعادي من دون التباس كالآتي:

جونز مريض أو سميث بالخارج أو الأمران معًا

ونصوغ الفصل الاستبعادي على النحو التالي:

جونز مريض أو سميث بالخارج، لكن ليس الأمران معًا

عندما نكون بصدد العبارة «ب أو ج» في ذاتها، لا ندري على العموم أي تأويل نسنده إليها. غالبًا ما يكون الاختيار غير مهم، نظرًا إلى أن كليهما يستعمل بشكل متُكافئ. هب أن لدينا العبارة «سـ ≤ ع»، أي «سـ < ع» أو «سـ = ع» فإنه لا يوجد اختلاف بين اعتبار «أو» فصلًا غيرَ استبعادي أو استبعاديًا، لأن الاختلاف الوحيد بين المعنيين يبرز في الحالة التي يصدق فيها المفصولان معًا؛ في حين عندما يكون المكوّنان هما «سـ < ع» و«سـ= ع»، فإن الجمع بين صدقهما لا يتم في الواقع ولا في عقل المتلفظ بها.

من الأخطاء الشائعة أن نعتبر أمثلة نحو «سـ < ع» أو «سـ = ع» أمثلة واضحة لاستعمال «أو» بالمعنى الاستبعادي، فينتُج عن هذا الخطإ الميلُ إلى تضخيم دور المعنى الاستبعادي لـ «أو» في اللغة اليومية. إنَّ الجملتين «سـ< ع» أو «سـ = ع» في ذاتهما مستبعدتان لبعضهما البعض، أو متنافيتان. غير أن هذا التنافي، بعيدًا عن الإقرار بأن السياق «سـ< فـ أو سـ= ف» يستعمل «أو» بمعناه الاستبعادي، يحرمنا من الحالة الوحيدة التي يُمكننا أن نأمل فيها التمييز بين المعنيين الاستبعادي وغير الاستبعادي. مناط ذلك أن الجملتين «سـ < ع» و«سـ = ع» تستبعدان بعضهما بالطبيعة. وعليه لا يهم إن كنّا نفهم «أو» باعتبارها تكرر هذا الاستبعاد أم لا.

وإذا كنا نود الحصول على أمثلة لا تقبل المناقشة بخصوص الاستعمال الاستبعادي لـ «أو»، علينا أن نتخيل سياقات يقصد الشخص، الذي يستعمل «أو»، فعلًا وبشكل صريح داخل العبارة المعطاة نفي صدق المفصولين معًا. إن مثل هذه الأمثلة نادرة جدًّا لكنها موجودة. يقدم تارسكي (Tarski) مثالًا مفاده أن طفلًا طلب من أبيه أن يصحبه إلى الشاطئ ثم إلى السينما. فأجاب الأب بنبرة الرفض، «سنذهب إما إلى الشاطئ أو إلى السينما». يبدو هنا المعنى الاستبعادي للفصل واضحًا: إذ يقوم الأب بالوعد وبالرفض معًا. بيد أنه من السهل جدًّا الحصول على حالات يُفرَض فيها التأويل غير الاستبعادي للفصل نفسه. مثال ذلك، أنه إذا تقرر منح جوازات السفر للأشخاص المزدادين بالبلد فقط أو لمن تزوج من مواطني البلد، فإن هذا لا يعني أن جوازات السفر لن تُمنَح لأولئك الذين ازدادوا بالبلد وتزوّجوا من مواطنيها. إن معظم استعمالات «أو» في اللغة اليومية تكون إمّا من هذا الصنف الذي لا يقبل سوى التأويل غير الاستبعادي، وإما من صنف «سـ< ع أو «سـ = ع» الذي يقبل كلا التأويلين على نحوٍ مماثل.

تتوفر اللغة اللاتينية على كلمتين مختلفتين للدلالة على معنيي «أو»

هما: «vel» بالنسبة إلى المعنى غير الاستبعادي، و«aut» بالنسبة إلى المعنى الاستبعادي. ومن المعتاد، في المنطق المعاصر، كتابة «v» كاختصار لـ «vel» وترمز إلى «أو» بالمعنى غير الاستبعادي: «ب∨ ج». وهذا الأسلوب في تركيب العبارات وحده نسميه الفصل. لذا لنتفق على المعنى غير الاستبعادي لـ «أو» الملتبس في اللغة العادية كلما صادفناه في ما سيأتي من هذا الكتاب، وإذا ما وجدت سياقات يكون فيها المعنى الاستبعادي لـ«أو» مطلوبًا حقًّا، حينئذ يكفينا التعبير عنه صراحة كالآتي:

ب أو جـ وليس الأمران معًا.

أو بكيفية مكافئة:

إما ب ولا جـ أو جـ ولا ب

وهو ما يكافئ رمزيًّا:

ب ∧ ¬جـ ∨ ¬ب ∧ جـ[1]

وعليه يُمكن صياغة دلالة الفصل من خلال القاعدة التالية: **يصدق الفصل إذا صدق على الأقل أحد المفصولين، ويكذب في ما عداها.** فإذا كان الوصل يصدق متى صدقت كل موصولاته، فإن الفصل يكذب متى كذبت كل مفصولاته. ويُمكن التمييز بين الوصل والفصل باعتماد تشبيه من مجال علم الوراثة كالآتي: يكون الصدق في الوصل أخس والكذب أقوى، ويكون الصدق في الفصل أقوى والكذب أخس.

وبما أن تفسير الفصل مماثل لتفسير الوصل، باستثناء تبادل أدوار الصدق والكذب، فمن البديهي أن الخصائص الصورية للوصل يجب أن تعاود الظهور باعتبارها خصائص صورية للفصل؛ ومن ثمَّ يكون الفصل، شأنه شأن الوصل، تجميعيًّا وتبديليًّا ومتُكافِئ القوة. إذ نستطيع أن نعيد كتابة «(ب ∨ جـ) ∨ د» و«ب ∨ (جـ ∨ د)»، على السواء كالآتي: ب ∨ جـ ∨ د؛

(1) بعد الفصل الثالث يُمكن أن نكتبها أيضًا كالآتي: «ب ↔ ¬ ج»

كما نستطيع أن نستبدل «جـ ٧ ب» بـ «ب ٧ جـ»؛ ويمكن أن نختزل: «ب ٧ ب» إلى «ب». إن ما يهم في الفصل المتصل، كما في الوصل المتصل، هو أن نقوم بجرد لمختلف مكونات العبارة المركبة.

برغم أن تجميع المكونات غير مهم في العبارتين الوصلية والفصلية المتصلتين، فإنه يصير مهمًا، عندما يجتمع الوصل والفصل، إذ يجب أن نميز، مثلًا، بين: «ب ٨ جـ ٧ د»؛ و«ب ٨ (جـ ٧ د)». سنضع، في الفصل الخامس، تقنية شاملة تسمح بتحليل كل العبارات المركبة التي تجمع روابط الوصل والفصل والنفي. وإلى ذلك الحين، من السهل أن نلاحظ منذ الآن أن «ب ٨ جـ ٧ د» و«ب ٨ (جـ ٧ د)» يتطلبان العمل بطرق غير متماثلة تمامًا. تكمُن نقطة الاختلاف البارزة في ما يلي: نظرًا لأن العبارة الوصلية «ب٨ (جـ ٧ د)» تتكون من الموصول «ب»، فإنها لا يُمكن أن تصدق إلا إذا صدقت «ب»؛ في حين أن العبارة الفصلية «٧ جـ ٨ ب د»، تتكون من المفصول «د»، فإنها تصدق متى صدقت «د»، حتى وإن كانت «ب» كاذبة.

يكون التركيب مهمًا بالقدر نفسه عندما يركَّب النفي مع الوصل أو الفصل. لا شَكَّ أننا لن نخلط، في الواقع، بين «¬ب ٨ جـ» و«¬(ب ٨جـ)»، أو بين «¬ب ٧ جـ» و«¬(ب ٧ جـ)»: لأن المكوِّن المنفي في الحالة الأولى هو المتغير القضوي «ب» فقط، في حين يدخل النفي، في الحالة الثانية، على العبارة المركبة برمتها. غير أن هناك حالات أقل وضوحًا نضطر للتمييز بينها من قبيل «¬(ب ٨جـ)» و«¬ ب ٨ ¬جـ» و«¬(ب٧ جـ)» و«¬جـ ٧¬ب». دعونا نرَطبيعة هذه الفروق، هب أن «ب» ترمز للعبارة «حقنت البنسلين»، و«جـ» ترمز للعبارة «فرض الحجر الصحي». هناك أربع حالات ممكنة:

ب ٨ جـ: حُقِنت البنسلين وفُرِض الحجر الصحي

¬ب ٨ جـ: لم تُحقن البنسلين وفُرِض الحجر الصحي

ب ٨ ¬ جـ: حُقِنت البنسلين ولم يُفرَض الحجر الصحي

~ ب ∧ ~ ج: لم تُحقَن البنسلين ولم يُفرَض الحجر الصحي

والحال أن «~(ب ∧ ج)» تنفي الحالة الأولى فقط، وبالتالي تصدق في الحالات الثانية والثالثة والرابعة. وبذلك تكون «~(ب ∧ ج)» مختلفة تمامًا عن «~ ب ∧ ~ج» التي لا تصدق إلا في الحالة الرابعة فقط. وتصدق «~ب ∨ ~ج» في كل مرة تصدق «~ب» و«~ج»، إمّا منفصلتين وإمّا مجتمعتين، أي في الحالات الثانية والثالثة والرابعة. وعليه يُمكن أن نعتبر «~ب ∨ ~ج» و«~(ب ∧ ج)» متكافِئتين. وأخيرًا، تصدق «~(ب ∨ ج)» عندما لا تصدق «ب ∨ ج»، أي في الحالة الرابعة فقط؛ لذا نستطيع أن نعتبر «~(ب ∨ ج)» و«~ب ∧ ~ج» متكافِئتين.

حاصل ما سلف أن «~(ب ∧ ج)» لا تكافئ «~ب ∧ ~ج»، بل تكافئ «~ب ∨ ~ج»؛ كما أن «~(ب ∨ ج)» لا تكافئ «~ب ∨ ~ج»، بل تكافئ «~ب ∧ ~ج». لا يُمكن أن نوزع علامة النفي الوارد في «~(ب ∧ ج)» وفي «~(ب ∨ ج)» على «ب» و«ج» بشكل منفرد إلا بشرط تغيير الوصل فصلًا والعكس بالعكس[1].

يكفينا القليل من التمعُّن لنكتشف العلاقة نفسها في اللغة العادية، إذ من الواضح أن صياغة «~ب ∧ ~ج» أو «ليس ب وليس ج» بواسطة «لا ب ولا ج»؛ وقد لا يكون غريبا البتة كون «لا ب ولا ج» مكافئة لـ «~(ب ∨ ج)» التي تُمثل نفيًا لـ«إما ب أو ج». ومن ناحية أخرى، يُمكن أن نقرأ «~(ب ∧ ج)» «ليس ب وج معًا»، ومن ثَمَّ ننتقل بلا قفزة إلى العبارة «إما لا ب أو لا ج».

فإذا قرأنا علامة النفي كالآتي: «من الكذب أن»، تصير الفروق التي يحدثها التركيب آلية:

~(ب ∧ ج) : من الكذب أن ب وج معًا

(1) يصطلح على هذه المتَكافِئات بقانوني دي مورغان (De Morgan's laws). انظر الفصل العاشر.

¬ب ∧ ¬جـ: من الكذب ب ومن الكذب جـ

¬(ب ∨ جـ) : من الكذب إما ب أو جـ

¬ب ∨ ¬جـ: من الكذب ب أو من الكذب جـ

إن العبارتين الأولى والأخيرة من بين الأربعة، كما رأينا ذلك، متكافئتان والشيء نفسه بالنسبة إلى الثانية والثالثة.

لمحة تاريخية: يعود استعمال الخط للتعبير عن النفي «–» وكذا الملاصقة للتعبير عن الوصل إلى بيانو (Peano) (ما بين 1886 و1901) وإلى مؤلفين سابقين عليه. ويعود استعمال خط فوق الحرف القضوي إلى ش. س. بيرس (C.S.Peirce) منذ 1870. أما الرمز «∼» ، الذي هو عبارة عن تعديل لحرف النون «n»، فقد عرف استعمالًا معينًا كرمز للنفي في القرن التاسع عشر، وأعاد إحياءه كلٌ من وايتهيد (Whitehead) وراسل (Russel). وهو شائع الاستعمال في يومنا هذا، بما في ذلك كتاباتي. ومع ذلك فضّلتُ، نظرًا لوجود كثير من الأحرف البسيطة المنفية في هذا الكتاب، استعمال خط بيرس فوق الحرف بسبب دموجها ووضوحها، لذلك، يناسب الخط أحسن من الرمز «∼» التعبير عن النفي في العبارات الأكثر طولًا. ويرجع رمز الفصل «∨» إلى وايتهيد وراسل، ويستعمله كل المناطقة تقريبًا في الوقت الراهن. غير أن عادة استعمال مصطلح الفصل أقل تجانسا، فالبعض يستعمل مصطلح «الفصل (disjuction)» الأقل إيحاءً. وتختلف عادة استعمال رمز الوصل، إذ يقلب البعض رمز الفصل لهذا الغرض، والبعض الآخر يستعمل، متابعًا هيلبرت (Hilbert) (1928)، العلامة «&». ويوجد، بالنسبة إلى النفي، رمز «¬» الذي أخذ في الانتشار إلى حدٍّ ما.

تمارين

1. أي الحالات التالية:

جونز مريض، سميث بالخارج

جونز ليس مريضًا، سميث بالخارج

جونز مريض، سميث ليس بالخارج

جونز ليس مريضًا، سميث ليس بالخارج

تجعل العبارة الآتية صادقة:

جونز ليس مريضًا أو سميث ليس بالخارج

في حالة المعنى الاستبعادي لـ«أو» وفي حالة معناها غير الاستبعادي؟

2. من غير المهم بالنسبة إلى صدق أو كذب العبارة السالفة، في بعض من الحالات الأربعة، أن نعتبر «أو» بالمعنى الاستبعادي، أو غير الاستبعادي، ما هي هذه الحالات؟

3. إذا كانت «ب» ترمز للعبارة «حقنت البنسلين» و«ج» ترمز للعبارة «فرض الحجر الصحي»، قم بالتمييز عبر صياغتهما لغويًا بين ~(ب V ج) و«~ب V ج». وما هي الحالات التي يصدق فيها أحد المكونات ويكذب الثاني؟

4. هل توجد حالات تكون فيها «~ب V ج» و«ب V ~ج» و«~ب V ~ج» و«~(ب V ج)» صادقة؟

2 الدوال الصدقية

ما يستوجبه الفهم الدقيق لروابط النفي والوصل والفصل منصوص عليه في القوانين الآتية:

تصدق «¬ب» إذا وفقط إذا كانت «ب» كاذبة.

تصدق «ب ∧ جـ ∧ ... ∧ن» إذا وفقط إذا كانت كل الموصولات صادقة.

تصدق «ب ∨ جـ ∨ ... ∨ن» إذا وفقط إذا لم تكن كل المفصولات كاذبة.

يتبين من القوانين السالفة الذكر أن النفي والوصل والفصل تشترك في خاصية مهمة مؤداها: أن البتّ في صدق أو كذب النفي أو الوصل أو الفصل يتوقف على معرفة صدق أو كذب مكونات العبارة فقط.

ومن الأفضل أن نصطلح على الصدق والكذب بالقيم الصدقية؛ وبذلك تكون القيمة الصدقية لعبارة ما هي الصدق أو الكذب متى كانت هذه العبارة صادقة أو كاذبة. وعليه، ما لاحظناه أعلاه هو أن القيمة الصدقية للنفي، أو للوصل، أو للفصل تتحدد من خلال القيم الصدقية لمكوناتها. ونصطلح على هذا الأمر بالدوال الصدقية لروابط النفي والوصل والفصل. وعمومًا، نعتبر مركبًا دالة صدقية لمكوناته متى كانت قيمته الصدقية متوقفة، في كل الحالات، على القيم الصدقية لمكوناته. وبعبارة أدق: تكون العبارة المركَّبة من عبارات بسيطة دالة صدقية إذا ظلت القيم الصدقية للعبارات المركبة على هذا النحو مطابقة، شريطة ألّا تتغير القيم الصدقية المطابقة لهذه المكونات[1].

(1) أشكر جيمس أ. طوماس (James A. Thomas) الذي نبهني إلى خطإ في صياغتي القديمة لهذه الجملة.

ويمكن أن نُقدّر بشكل أفضل الخاصية التي يتصف بها النفي والوصل والفصل باعتبارها دوالّ صدقية إذا قمنا في المقابل بفحص عبارة ليست دالّة صدقية:

مات جونز لأنه أكل السمك بالآيس كريم

فحتى عندما نعتبر العبارتين «مات جونز» و«جونز أكل السمك بالآيس كريم» صادقتين، فإن صدق العبارة المركبة قد يظل موضع جدال. مناط ذلك أن القيمة الصدقية للعبارة لا تحدد بواسطة مكوناتها فقط، بل من خلال هذه بالإضافة إلى اعتبارات أخرى مكملة غامضة جدًّا. في حين لا تكون القيمة الصدقية للوصل:

أكل جونز السمك بالآيس كريم فمات

أو الفصل:

أكل جونز السمك بالآيس كريم أو مات

أو النفي:

لم يمت جونز

موضع جدال بمجرد أن نعلم القيم الصدقية للعبارتين «أكل جونز السمك بالآيس كريم» و«مات جونز» كل واحدة على حدة.

يظهر أن المركب «ب بسبب ج» ليس دالة صدقية للمكونين «ب» و«ج» لأنه لا يصير صادقًا إلا عندما تسند قيم صدقية معينة إلى «ب» و«ج»، ويصير كاذبًا عندما تسند قيم صدقية مغايرة إلى «ب» و«ج». أما في حالة «ب V ج» و«ب ٨ ج» و«¬ب»، فإن كل المكونات الصادقة وكل المكونات الكاذبة تكون نافعة أو غير نافعة كلما تعلّق الأمر بصدق أو كذب المركب المعني.

يُمكن أن نصف كل دالة صدقية خاصة وصفًا مناسبًا من خلال وضع جدول للقيم الصدقية التي يُمكن أن تسند إلى العبارة بالنسبة إلى مختلف

القيم الصدقية التي يُمكن أن تسند إلى مكوناتها. وقد تم، فعلًا، وصف دوال الصدق الثلاث الأساسية بشكل مختصر في بداية هذا الفصل. يُمكن أن ندخل أي رمز رابع غير معتاد في الدالة الصدقية، بالطريقة نفسها، ونفسره بشكل صحيح عبر تعيين قيم الصدق المطلوبة للمكونات لجعل العبارة المركبة الجديدة صادقة، وقيم الصدق التي تجعلها كاذبة. وعليه، إذا رمزنا، مثلًا، إلى «أو» الاستبعادية بـ «أو استب» نستطيع شرحها بشكل جليّ إذا قلنا إن العبارة «ب أو استب ج» تكذب متى صدقت «ب» و«ج» أو كذبتا معًا؛ وتصدق في الحالتين المتبقيتين («ب» صادقة، و«ج»كاذبة والعكس صحيح).

هناك سؤال يفرض نفسه الآن: هل يشكل هذا النفي والوصل والفصل لغة كافية لكل الدوال الصدقية الممكنة؟ وهل يُمكننا، متى توفرنا على تفسير لدالة صدقية لرمز جديد (مثل «أو استب») أن نكون على يقين تام في جميع الحالات بأن الرمز الجديد قابل للترجمة إلى الرموز الأخرى الموجودة من قبل؟ الجواب هو أن النفي والوصل يكفيان دائمًا، بل لا حاجة حتى إلى الفصل!

هب مرة أخرى مثلًا العبارة «ب أو استب ج» التي بيّنا أنها تكذب في الحالة (أ) حيث تكون «ب» و«ج» صادقتين معًا، وفي الحالة (ب) حيث تكون «ب» و«ج» كاذبتين معًا. هكذا تعود «ب أو استب ج» ببساطة، إلى نفي العبارتين «ب ∧ ج» و«¬ب ∧ ¬ج» معًا؛ لأن «ب ∧ ج» تصدق في حالة (أ) وحدها فقط؛ و«¬ب ∧ ¬ج» في الحالة (ب) وحدها فقط. وبذلك تُكافِئ «ب» أو استب ج» العبارة:

¬(ب ∧ ج) ∧ ¬(¬ب ∧ ¬ج).

وهي وصل بين العبارتين ¬(ب ∧ ج) و¬(¬ب ∧ ¬ج)؛ إنه وصل ينفي «ب ∧ ج» و«¬ب ∧ ¬ج» معًا دون غيرهما. وتكذب الصيغة «ب أو-استب ج» في

الحالتين اللتين تكذب فيهما «¬(ب∧ج) ∧ ¬(¬ب ∧ ¬ج)» معًا، في حين تصدق في الحالتين اللتين تصدق فيهما «¬(ب∧ج) ∧ ¬(¬ب ∧ ¬ج)». وعليه، يتضح أن الرمز«أو-استب» نافل، لذا يُمكن أن نكتفي بالوصل والنفي.

وعلى المنوال نفسه، يُمكن أن نبرهن أن رمز رابط الفصل «∨» رمزًا نافلًا. فالحالة الوحيدة التي تكذب فيها العبارة «ب ∨ ج» هي عندما تكذب «ب» و«ج» معًا: أي عندما تصدق «¬ب ∧ ¬ج». وعليه، بدل أن نكتب «ب ∨ ج» ننفي العبارة الوصلية «¬ب ∧ ¬ج» فقط، فنكتب ¬(¬ب ∧ ¬ج).

يوضح هذان المثالان البسيطان على ترجمة دوال الصدق إلى النفي والوصل طريقة عامة تسري على كل الدوال الصدقية تقريبًا. مفادها أنه متى كان لدينا وصف للدالة الصدقية، أي جدول يوضح القيم الصدقية المسندة إلى كل واحد من مكونات العبارة المركبة، فإننا نستطيع بناء دالة صدقية باعتماد النفي والوصل تطابق ذلك الوصف. وتصبح هذه الطريقة العامة بديهية من خلال مثال جديد يكون هذه المرة أقل بساطة وأكثر اعتباطًا من «أو-استب» و«∨». هب أن دالة صدقية ما تتكون من «ب» و«ج» و«د» كالآتي، يجب أن تصدق في الحالات الخمس الآتية:

«ب» كاذبة،	«ج» صادقة،	«د» صادقة،
«ب» صادقة،	«ج» كاذبة،	«د» صادقة،
«ب» صادقة،	«ج» صادقة،	«د» كاذبة،
«ب» كاذبة،	«ج» صادقة،	«د» كاذبة،
«ب» كاذبة،	«ج» كاذبة،	«د» كاذبة.

وتكون كاذبة في الحالات الثلاث المتبقية:

«ب» صادقة،	«ج» صادقة،	«د» صادقة،
«ب» كاذبة،	«ج» كاذبة،	«د» صادقة،
«ب» صادقة،	«ج» كاذبة،	«د» كاذبة.

إن هذه الحالات الثلاث الأخيرة هي، على التوالي، الحالات التي تكون فيها العبارات «ب∧ جـ∧ د» و«¬ب ∧ ¬جـ∧ د» و«ب∧¬جـ∧ ¬د» صادقة كل واحدة على حدة؛ وبذلك نحصل على العبارة المركبة التي نبحث عنها عندما ننفي الحالات الثلاث غير المطلوبة في الوقت ذاته، في صيغة عبارة وصلية:

¬(ب ∧ جـ∧ د) ∧ ¬(¬ب ∧ ¬ جـ∧ د) ∧ ¬(ب ∧ ¬جـ∧ ¬د)

هكذا يتبين أن هذه العبارة المركبة تنفي بشكل صريح فقط الحالات التي يجب أن تكذب فيها، أما في الحالات المتبقية فتكون صادقة.

من الواضح أن هذه الطريقة تصلح لجميع الأمثلة متى وجدت بعض الحالات، واحدة أو أكثر، يجب أن تكذب فيها العبارة المركبة المعنية. هكذا نتوفر على طريقة آلية تُمكنّنا من التعبير عن كل الدوال الصدقية تقريبًا بواسطة النفي والوصل. أما الدوال الصدقية الوحيدة التي لا يُمكن أن تنطبق عليها طريقتنا فهي تلك التي تصدق في كل الحالات، بغض النظر عن القيم الصدقية لمكوناتها. تستوجب هذه الاستثناءات المبتذلة معالجة منفصلة؛ وهي معالجة تبرز على التو لا تقل ابتذالًا. فإذا كانت مشكلتنا تكمُن في التعبير عن الدالة الصدقية «ب» و«جـ»، و«د»، و«ع»، مثلًا، بحيث تصدق، إذا جاز القول، بغض النظر عن القيم الصدقية المسندة إلى «ب» و«جـ» و«د» و«ع»، يُمكننا أن نحلها بمجرد ما نكتب ما يلي:

¬(ب ∧ ¬ب ∧ جـ∧ د ∧ ع).

من الواضح أن العبارة «(ب ∧ ¬ب ∧ جـ∧ د ∧ ع)» ستكذب في كل الحالات بسبب «ب ∧ ¬ب»، وبالتالي ستكون ¬(ب ∧ ¬ب ∧ جـ∧ د ∧ هـ) صادقة في كل الحالات.

هكذا يتضح جليًا أن النفي والوصل يشكّلان لغةً كافية لكل الدوال الصدقية المتصورة. ودون أن نضطر إلى إضافة ترميزات جديدة للتعبير عن دوال الصدق التي لا تزال غير قابلة للصياغة رمزيًا، نستطيع أن نحذف

الرمز «V» نفسه الذي نتوفر عليه. غير أننا في الواقع لن نحذفه لأنه يسهّل علينا مختلف الإجراءات التقنية (انظر الفصلين 10 و12).

تجدر الإشارة إلى أن الوصل لا يقل ابتذالًا، في الواقع، عن الفصل، لأن الكتابة الرمزية المناسبة للدوال الصدقية لا تتم بواسطة النفي والوصل فقط، بل بالنفي والفصل أيضًا. لتبيان ذلك يكفينا أن نلاحظ أن العبارة الوصلية «ب ٨ ج» تقبل الترجمة إلى الصيغة «⌐(⌐ب V ⌐ج)» بواسطة النفي والفصل. وهي صيغة تكافؤ «ب ٨ ج»، بمعنى أنها تصدق متى صدقت «ب» و«ج» معًا، وتكذب في الحالات الأخرى. وبذلك تصدق «⌐(⌐ب V ⌐ج)» إذا وفقط إذا، كذبت «⌐ب V ⌐ج»، أي إذا وفقط إذا كذبت «⌐ب» و«⌐ج» معًا. وبالتالي، إذا وفقط إذا صدقت «ب» و«ج» معًا.

يمكن أن نبدل النفي والوصل، أو النفي والفصل، برابط واحد يرمز إليه بعارضة عمودية «|» يقرأ كالآتي: تصدق «ب|ج» إذا وفقط إذا لم تصدق «ب» و«ج» معًا. وبذلك تُكافِئ «ب| ج» ما نعبر عنه بالنفي والوصل كالآتي: ⌐(ب ٨ ج)؛ في حين إذا اعتبرنا «|» رابطًا أساسيًّا، فسنعبر عن «⌐ب» بواسطة الرابط «|» كالآتي: «ب|ب» وسنعبر عن «ب ٨ ج » كالآتي: «(ب|ج)|(ب|ج)». يوجد رابط آخر يكون بدوره كافيًا هو «↓»، أو «لا-لا». تُكافِئ الصيغة «ب↓ج» ما نعبر عنه بواسطة النفي والوصل كالآتي: «⌐ب ٨ ⌐ج». في حين إذا اعتبرنا «↓» رابطًا أساسيًّا، فإننا نستطيع أن نعبر عن العبارة «⌐ب» بالصيغة «ب ↓ ب»، وعن العبارة «ب ٨ ج» بالصيغة «(ب ↓ ب)↓ (ج↓ ج)».

لمحة تاريخية: استعمل الرواقيون[1] قديمًا النفي والوصل والفصل بشكل متكامل، وأعيد اكتشافه في القرون الوسطى من قبل بيتروس هيسبانوس (Petrus Hispanicus) ودانس سكوتيس (Duns Scotus) وآخرون[1]. أما في العصر الحديث فقد استعملها أساسًا جورج بول (G. Boole) (ابتداءً من 1847) وشرويدر (Schröder) (ابتداءً من 1877). في حين يعود مصطلحا القيمة الصدقية و«الدالة الصدقية» إلى فريغه (1879) (Frege). ويرجع إجراء الاختزال إلى الرمزين «|» و«↓» إلى شيفر(1913) (Sheffer).

تمارين

1. صغ عبارة مكونة من «ب» و«ج» و«د»، مستعملًا رابطي النفي والوصل فقط، بحيث تكون هذه العبارة صادقة متى كان مكونان من مكوناتها الثلاثة فقط صادقين، وكاذبة في الحالات الأخرى.
2. أجب عن السؤال نفسه باستعمال الفصل والنفي فقط. ستكون إحدى الطرائق هي ترجمة الإجابة السابقة.

(1) See Łukasiewicz, « Zur Geschichte », cited in the bibliography.
(وهي مقالة نشرها لوكازفيتش سنة 1935. في مجلة المعرفة (انظر المرجع)
J. Lukasiewicz, « Zur Geschichte der Aussagenlogik » erkenntnis 5, 1935, p. 111-131.
ونقلها إلى الفرنسية جان لارجو تحت عنوان: «مساهمة في تاريخ منطق القضايا»:
J. Largealt, 1972, « contribution à l'histoire de la logique des propositions », in : logique mathématique, Armand colin, Paris, p. 9-25.) .[المترجم]

3 رابط الشرط

يوجَد، بجانب رابطَي الوصل «و» والفصل «أو»، رابطٌ آخرُ يلعب دورًا هامًا في اللغة العادية، هو «إذا-فـ». وتسمى العبارة ذات الصيغة «إذا ب فإن ج» عبارة شرطية. ويسمَّى المكوّن «ب» مقدّم الشرط، ويسمّى المكوّن «ج» التالي.

لا يصدق الوصل بين عبارتين، كما نعلم، إلا إذا صدق الموصولان معًا؛ ولا يصدق الفصل إلا إذا كان أحد المفصولين أو هما معًا صادقين. لكن متى يصدق الشرط؟ عندما نضع هذا السؤال نبتعد عن المواقف المعتادة. تعتبر الصيغة المثبتة «إذا ب فإن ج» عادة إثباتًا للشرط بدرجة أقل من اعتبارها إثباتًا شرطيًا للتّالي[1]. وعليه، إذا ظهر، بعد أن نضع مثل هذا الإثبات، أن المقدم صادق، فسنعتبر أنفسنا مُلتزِمين بالتالي، وسنكون مستعدين للاعتراف بخطئنا إذا تبين كذبُه. في المقابل، إذا ظهر أن المقدم كاذب، فسيتم كل شيء كما لو كان إثباتنا الشرطي لاغيًا.

ومع ذلك لنتخلَّ عن هذا الموقف المتداول ولننظرْ إلى العبارات الشرطية باعتبارها مجرد مكونات للعبارات التي تحتمل، على غرار العبارات الوصلية والفصلية، الصدق والكذب في كليتها. ما الشروط التي يصدق فيها، إذًا، الشرط في كليته؟ وما الشروط التي يكذب فيها؟ متى كان مقدم الشرط صادقًا، يقترح الاعتبار السابق للمواقف المعتادة تطابق قيمة صدق

(1) أنا مدين هنا للدكتور فيليب رينيلاندر (Dr. Philip Rhinelander). سأستعمل، في موضع آخر من هذا الفصل، المبحث الثاني من كتابي المنطق الرياضي بعد إذن ناشري منشورات جامعة هارفرد.

الشرط مع قيمة صدق التالي؛ وبذلك، يصدق الشرط إذا كان المقدم والتالي صادقَيْن؛ في حين يكذب الشرط إذا صدق المقدم وكذب التالي. وعلى العكس، يكون إسناد قيمة صدقية إلى الشرط بالأحرى أكثر اعتباطية عندما يكون المقدم كاذبًا. غير أن الإقرار الذي يبدو ملائمًا أكثر هو أن نعتبر كل العبارات الشرطية التي يكون مقدمها كاذبًا صادقة. سنكتب الشرط «إذا ب فإن ج»، المصوغ بهذه الشاكلة، على هذا النحو: «ب ← ج» فيسمًى **الشرط المادي**. يكون الشرط المادي صادقًا إذا صدقت «ب» و«ج»، ويصدق، أيضًا، إذا كذبت «ب» وصدقت «ج»، والشيء نفسه عندما تكذب «ب» و«ج» معًا. ولا يكذب إلا في الحالة المتبقية، أي عندما تصدق «ب» وتكذب «ج».

إن الرمز «←» مبتذل مثل «∨». نعلم منذ الفصل الثاني كيف نصوغ عبارة مركبة بواسطة الوصل والنفي فقط، تكون كاذبة في حالة واحدة فقط، أي عندما تصدق «ب» وتكذب «ج»، وهو ما نرمزله كالآتي: ¬(ب ∧ ¬ ج) بدل «ب ← ج». لذا نستطيع التخلي تمامًا عن الرمز«←»، بأن نكتبه دائمًا على هذا النحو: «¬(ب ∧ ¬ج)» بدل «ب ← ج». علاوة على أنه يوجد تعبيريسهل إدراك أنه يدل على الشيء نفسه، وهو: «¬ب ∨ ج». ومع ذلك سيظهر لنا في الأخير، أن الرمز«←» المبتذل يسهل العمليات التقنية.

لننظر إلى العبارة الآتية:

(1) إذا كان كائن ما من الفقريات، فإن له قلبًا.

في البداية، لا تعتبر هذه العبارة شرطية بالمعنى الذي سقناه من قبل، لأنه ليس مركبًا، فعلًا، من عبارتين: «كائن من الفقريات» و«له قلب». فالجملة «له قلب» ليست عبارة تحتمل الصدق أو الكذب، والتي يُمكن أن نعتبرها في ذاتها، فتكون صادقة في حالة وجود الفقريات. يجب بالأحرى أن نعتبر(1) إثباتًا لسلسلة متوالية من الشرطيات الفردية: إذا كانت س من الفقريات،

فإن لـ سـ قلبًا؛ إذا كانت عـ من الفقريات، فإن لـ عـ قلبًا، وهكذا دواليك. وهو ما يُمكن أن نكتبه باختصار كالآتي:

(2) أيا كانت سـ، إذا كانت سـ من الفقريات، فإن لـ سـ قلبًا.

غير أنه تجدر الإشارة إلى أن كل شرط حزمة، ضمن متوالية الشرطيات التي تثبتها العبارة (2)، يُمكن أن يُؤوَّل بشكل صحيح تمامًا باعتباره شرطًا ماديًا. ذلك لأننا إذا اعتبرنا «ب ← ج» تُكافِئ « ~(ب∧~ج)»، ثم أعدنا كتابة (2) سنحصل على:

أيا كانت سـ، من الكذب أن سـ من الفقريات وليس لها قلب في الوقت نفسه.

أو باختصار شديد:

(3) لا شيء من الفقريات وليس له قلب.

وهي عبارة تُكافِئ تمامًا العبارة الأصلية (1). وهكذا يُمكن للشرط المُعمَّم، من قبيل (1)، أن يُؤوَّل بتطابق تام مع الاستعمال المتداول، باعتباره يثبت متوالية من الشرطيات المادية. يعتبر الشرط المعمم، بشكل عام، أحد موضوعات الباب الثاني، لأنه يتجاوز المرحلة الحالية من التحليل التي تتعلق بتركيب العبارات، من مكونات غير مُحلَّلة بشكل واضح تمثِّل بدورها عددًا من العبارات المستقلة.

يوجد استعمال آخر لـ «إذا...فـ» من الضروري ألا نفهمه، بالتأكيد، بالطريقة التي سلكناها بالنسبة إلى «ب←ج». ويتعلق الأمر بالشرط الممتنع[1]، نحو:

(4) لو ترشح وولبرت للانتخابات لخسرها

كل من يثبت الشرط على هذا النحو بأسلوب الشرط، يكون مستعدًّا مسبقًا لاعتبار المقدم كاذبًا بلا قيد، لكنه يأمل في أن يضيف الشرط معلومة معينة.

(1) يعبر عنه المناطقة العرب بـ « لو... له. [المترجم]

من المؤكد إذًا أنه لا يعتبر أن مثل هذا الشرط يتحقق بكيفية آلية (كما هو حال «ب←ج») لمجرد أن المقدم كاذب. لا تسري حقًّا ملاحظاتنا السالفة على هذا النوع من الشرط لأن الشرط في الاستعمال العادي يتوقف عن أن يكون فارغًا وبلا أهمية، بمجرد ما يتبين كذب المقدم.

يتميز الشرط الممتنع عن الشرط العادي بوضوح تام في الأسلوب الخبري. وأيًا كان التحليل الصحيح الخاص بالشرط الممتنع، فإننا قد نكون على يقين بشكل مسبق من أنه لن يكون دالة صدقية: مناط ذلك كما هو واضح، أن الاستعمال العادي للشرط يقتضي أن تصدق بعض الشرطيات الممتنعة ذات مقدم وتالٍ كاذبين؛ وأن تكذب شرطيات أخرى ذات مقدم وتالٍ كاذبين. هكذا يجب أن تتجاوز كل التحليلات المناسبة للشرط الممتنع القيم الصدقية، واعتبار العلاقات السببية أو العلاقات المماثلة لها، بين المواد التي يتم الحديث عنها في مقدم الشرط وتلك التي يتم الحديث عنها في التالي. يُمكن أن نتساءل فعلا عن إمكانية وضع نظرية متّسقة للشرط الممتنع، في استعماله العادي، خصوصًا عندما نحاول أن نبتَّ في أمثلة من قبيل:

لو كان بيزيت وفيردي من البلد نفسه، لكان بيزيت إيطاليًا؛

لو كان بيزيت وفيردي من البلد نفسه، لكان فيردي فرنسيًّا.

إن مشكلة الشرطيات الممتنعة، في جميع الأحوال، مشكلة عويصة[1]، وهي مشكلة لا تنتمي إلى المنطق الخالص، بل إلى نظرية الدلالة، أو ربما إلى فلسفة العلم. ولن نتناول هذه المشكلة في هذا الموضع.

هكذا لن نعتبر الشرط المادي «ب ← ج» تحليلًا للشرطيات العامة مثل (1)، ولا تحليلًا للشرط الممتنع مثل (4)، بل في أفضل الأحوال تحليل للشرط

(1) انظر نيلسون غودمان:
Nelson Goodman, "the problem of contrafactual conditionnals".

المفرد العادي في الأسلوب الخبري. وحتى عندما نُحلل مثل هذه الشرطيات بهذه الطريقة، فإننا نشعر أحيانًا أن الصيغة «ب ← ج» أو «¬(ب ∧ ¬ج)» غير طبيعية، لأنها تدفعنا إلى اعتبار الشرط صادقًا، بغض النظر عن غياب العلاقة بين المقدم والتّالي، ما لم تُوجد حالة يصدق فيها المقدم ويكذب التالي. تعتبر العبارات الشرطية التالية، على سبيل المثال، صادقة:

(5) إذا كانت فرنسا بأوروبا، فإن البحر مالح،

(6) إذا كانت فرنسا بأستراليا، فإن البحر مالح،

(7) إذا كانت فرنسا بأستراليا، فإن البحر عذب.

تبدو هذه النتيجة، بلا شك، غريبة؛ لكن لا أظن أن الأمر سيكون أقل غرابة لو اعتبرنا (5) -(7)كاذبة. توجد الغرابة بالأحرى في العبارات (5)-(7) ذاتها، بغض النظر عن صدقها أو كذبها؛ لأنه ليس من المعتاد عمليًا أن نصوغ شرطيات انطلاقًا من عبارات مكوِّنة يكون صدقها أو كذبها معروفًا سلفًا وبلا قيد. يسهل إدراك هذا السبب غير المعتاد: لماذا نثبت عبارة طويلة مثل (5) أو (6) في الوقت الذي نكون فيه قادرين على إثبات العبارة الأوجز والأقوى «البحر مالح»؟ ولماذا نثبت عبارة طويلة مثل (6) أو (7) في الوقت الذي نستطيع إثبات عبارة أوجز وأقوى «لا توجد فرنسا بأستراليا»؟

إن من يثبت عمليًا العبارة «إذا ب فإن ج» لا يكون عادة متيقنًا من صدق أو كذب «ب» و«ج» كل واحدة على حدة، بل لديه سبب ما فقط يدفعه إلى عدم الاعتقاد في العبارة «ب ولا ج» في كليتها. نقول:

إذا كان جونز مصابًا بالملاريا، فإنه يحتاج إلى دواء الكينين (quinine)،

لأن لدينا معرفة بالملاريا ونشك في مرض جونز وفي حاجته إلى دواء الكينين. وحدها الشرطيات التي تنجم عن علاقة مباشرة بين المقدم والتالي تستحق الإثبات، من قبيل قانون يربط بين الوقائع التي تصفها العبارتان البسيطتان. غير أن هذه العلاقة لا تحتاج، وإن تشكّلت أساسًا من أجل

التطبيقات المفيدة للشرط، إلى المساهمة في دلالته. وتكون هذه العلاقة أساس التطبيقات المفيدة للشرط حتى وإن فُهمت دلالة هذا الشرط بشكل دقيق، باعتبارها « ¬(ب ∧ ¬ ج)».

تشبه هذه الوضعية حقًّا بشكل كبير وضعية الرابط «أو»: فالعبارة:

تقع فرنسا في أوروبا أو البحر عذب

تستحق أن تثبت بقدر أقل من العبارات (5)-(7)، وللسبب نفسه: نستطيع أن نقتصد جهدنا ونبلغ معلومات أكثر، عندما نثبت فقط العبارة «تقع فرنسا بأوروبا». عمليًّا، من يثبت «ب أو ج» يكون، عادة، غير متيقن من مدى صدق أو كذب «ب» و«ج» كل واحدة على حدة، لكنه يعتقد ببساطة أن إحديهما على الأقل صادقة طبقًا لقانون أو لشكل آخر من العلاقة التي تربط الوقائع التي تصفها العبارتان البسيطتان. هكذا يتضح أننا لانحتاج إلى إعطاء دلالة للرابط «أو» في ذاته غير الدلالة الصدقية «لا يكذبان معًا».

وتعود مسألة معرفة مدى تطابق «ب ← ج» مع العبارة الشرطية الخبرية «إذا...ف»، في كل الأحوال، إلى التحليل اللساني، وهو ضعيف الأثر على مقاصدنا. ما يهمنا هو أن نقرّ بأن «ب ← ج»، أي الشرط المادي، يجب أن يحوز بالضبط الدلالة «¬(ب ∧ ¬ ج)» (أو «¬ب ∨ ج»(؛ وسنرى بوضوح كافٍ، كلما تقدمنا، كيف يُطابق بشكل جيّد هذا المفهوم المقاصد التي يقترحها التعبير «إذا... ف» بكيفية طبيعية. ويمثل الشرط المادي، على الخصوص، كما سلف الذكر، ما نحتاج إليه فعلًا بالنسبة إلى الأمثلة الفردية التي يغطيها الشرط العام من الصنف (1).

لا شك أن الصيغة «ب إذا وفقط إذا ج» التي نصطلح عليها بالتشارط، تُكافِئ بوضوح الوصل بين العبارتين الشرطيتين: «إذا ب فإن ج» و«إذا ج فإن ب». وكل ما يسري على تأويل الشرط يسري، مع إجراء التعديلات اللازمة، على التشارط: أيًّا كان استعمالنا لـ «إذا...ف» وأيًّا كانت الدلالة التي نسندها

إليه، يجب أن يسريا على «إذا وفقط إذا». وخصوصًا عندما يُفسَّر الشرطُ باعتباره شرطًا ماديًا «ب ← ج»، فإن التشارط الذي يقابله يكون تشارطًا ماديًا ويكتب «ب ↔ ج». وحيث يُمكن أن نعتبر «ب ↔ ج» مجرد اختزال لـ «(ب ← ج) ∧ (جـ ← ب)» أو لـ «¬(ب ∧ ¬ ج)∧ ¬ (جـ ∧ ¬ ب)»، فمن الواضح أن يكذب في وفقط في حالتين هما: عندما تصدق «ب» وتكذب «ج»، وعندما تصدق «ج» وتكذب «ب». بعبارة أخرى، يصدق التشارط المادي إذا كان لطرفيه القيمة الصدقية نفسها (أي إما أن يصدقا معًا، أو يكذبا معًا)، ويكذب إذا أُسنِدَت إلى طرفيه قيمتان صدقيتان مختلفتان.

ليست الرموز «↔» و«←» و«∨» ضرورية، فقد رأينا، بالفعل، أن «ب↔ج» يُمكن التعبير عنها فقط بالوصل والنفي كالآتي: «¬(ب ∧ ¬ج) ∧ ¬ (جـ ∧ ¬ ب)». غير أن كل واحد من هذه الرموز، كما سيتبيّن في حينه، وإن كان غير ضروري، يلعب دورًا خاصًا في تبسيط تقنيات المنطق.

لمحة تاريخية: يرجع الشرط المادي إلى فيلون الميغاري (Philo of Megara). وتم إحياؤه في المنطق المعاصر من قبل كلٍّ من فريغه (1897) وبيرس (1885) (Peirce). كانت صيغة الشرط المادي ومدى ملاءمته موضع نقاش حاد في العصر القديم (انظر بيرس، 3.441 وما يليها: ولوكازفيتش، «مساهمة في تاريخ منطق القضايا» (Zur Geschichte)، ص. 116). وأصبحت موضوعًا شائعًا، مع ذلك، إثر عدم التمييز بوضوح بين الشرط واللزوم (انظر الفصل السابع).

استُعمل رمز الشرط «⊃» من قِبل جورجوني (Gergonne) ابتداءً من سنة 1816، ولكن ليس بمعنى الشرط المادي. وأعاد بيانو (Peano) إحياءها واستخدمه وايتهيد وراسل بالمعنى المادي. انتشر استخدامه على نطاق واسع في الأدبيات اللاحقة، بما في ذلك الطبعات السابقة لهذا الكتاب. ومع

ذلك، كان له عيب يكمُن في أنه يبدو وكأنه عكس علامة التضمّن «⊃» التي ستظهر في الفصل العشرين واستعمالها النموذجي في نظرية المجموعات. أخيرًا ، تبنيت رمز هيلبرت (Hilbert) الذي يستخدم الآن على نطاق واسع وهو أكثر قبولًا. تبنيت بشكل متوافق الرمز «↔» للتشارط. كنت أرمز له في الطبعات السابقة، متابعًا وايتهيد وراسل، بالعلامة «≡» التي سأستعملها استعمالًا مختلفًا في الفصل 20.

تمارين

1. لقد قُلنا في أحد هوامش الفصل الأول إنه يُمكن كتابة «ب أو ج» بالمعنى الاستبعادي، «ب↔ ¬ج». فسِّر لماذا؟
2. ترجم «ب ↔ ج» باعتماد الفصل والنفي فقط.

4 مشكلات التركيب

يوجد نوع واضح من الالتباس في اللغة الطبيعية هو التباس تركيب الكلمات. فمثلًا العبارة:

«سيحتل جونز المرتبة الأولى ويكون سميث وصيفه إذا أُقصي روبنسون»،

عبارة ملتبسة تمامًا من زاوية التركيب، إذ لا شيء يدلّنا عمّا إذا كان احتلال جونز المرتبةَ الأولى يتوقف على إقصاء روبنسون. وإذا كان الأمر كذلك فإن الصيغة المنطقية ستكون هي «ب ←جـ ٨ د»؛ أما إذا كانت عكس ذلك، فإن الصيغة المنطقية ستكون هي «جـ ٨ (ب ← د)»، حيث ترمز «ب» إلى «أُقصِي روبنسون»، و«جـ» إلى «سيحتل جونز المرتبةَ الأولى»، و«د» إلى «سميث وصيفه».

يمكن أحيانًا أن نتوقع التركيب المقصود في العبارات المركبة للغة العادية، كما سلف الذكر، ويجب أحيانًا أن نستنتجه من مؤشرات غير منظمة كما هو الحال في المثال الآتي:

(1) إذا لم تستطع الحملة الجديدة بالرسائل تكسير احتكار دريبسويت (Dripsweet)، وتستعيد حرية المنافسة، فإن جونز سيبيع سيارته ويرهن بيته.

يساعد الحرفان «إذا» و«فـ» هنا في تحديد التركيب، لأنهما يؤطران المقدم المركب لعلاقة الشرط بالوضوح نفسه الذي تنتجه الأقواس. لكنهما لا يبينان أي جزء من النص يُمكن أن يشكل تالي الشرط. هل علينا أن نحصر

تالي الشرط عند آخر «و»، أم نعتبره الجزء الذي يمتد إلى نقطة النهاية؟ يبدو الجواب الصحيح بديهيًا من الوهلة الأولى؛ لكن دعونا نبين بوضوح لماذا. لقد تداخلت الجملتان «سيبيع جونز سيارته» و«سيرهن جونز بيته» عبر حذف تكرار «جونز س»، وهذا يدلّ على أن حرف «و» له هنا هدف واحد هو الربط بين هاتين الجملتين فقط، بدل أن يجعل من الشرط في كليته، عبر الرجوع إلى البداية، أحد موصولي رابط الوصل. إننا نعلم، إذًا، أن (1) يجب أن تؤوَّل كعبارة شرطية يكون مقدَّمها كالآتي:

لم تُكسر الحَمْلة الجديدة بالرسائل احتكار دريبسويت وتستعيد المنافسة الحرة،

ويكون تاليها:

سيبيع جونز سيارته ويرهن بيته.

ومع ذلك، تظل هناك مشكلة تتعلق بالتركيب تخص مقدم الشرط: هل يعمل حرف النفي «لم» في المقدم برمته، أم في الجزء السابق على «و»؟ من البديهي أنه يعمل في الكل. ولنلاحظ أن بداهة هذا الاختيار ترجع إلى عملية اختصار شبيهة بتلك التي لاحظناها من قبل: الكلمات «تستعيد المنافسة الحرة» التي تلي «و» يجب أن تعتبر، بسبب خاصيتها التجزيئية، كربط مع «لم يُكسر احتكار دريبسويت». هكذا تكون العبارة (1) شرطية ذات الصيغة: «~ (ب ∧ ج) ← د ∧ ع»، حيث تعني «ب» «تكسر الحملة الجديدة بالرسائل احتكار دريبسويت»، وتعني «ج» «تستعيد الحملة الجديدة بالرسائل المنافسة الحرة»، وتعني «د» «سيبيع جونز سيارته»، وتعني «ع»، أخيرًا «سيرهن جونز بيته».

لدينا براعة عجيبة في اللغة الطبيعية، ولهذا لا بُدَّ أن تكون صحة التأويل الذي أعطيناه للعبارة (1) أكثر مباشرةً وبداهةً بالنسبة إلينا جميعًا من أسبابه الصريحة. غير أن تحليل هذه الأسباب يُسلّط لنا بعض الضوء

على طبيعة الوسائل غير المنظمة التي تنجح لغتنا اليومية أحيانًا بواسطتها في توفير إشارات التركيب على الأقل عندما تنجح في ذلك.

لقد لاحظنا فعالية «إذا» و«ف» في تعيين حدود مقدم الشرط. وبأسلوب مماثل يُمكن أن نستعمل «إما» و«أو» لتعيين أوصاف المفصول الأول للفصل؛ بل يُمكن أن نستعمل «هما معًا» و«و» لتعيين حدود الموصول الأول للوصل. وهكذا يُمكن أن يزول الالتباس من العبارة الآتية:

جاء جونز وبقي سميث أو غادر روبنسون

بأن ندخل «إما» في المكان المناسب لصالح «ب ٨ جـ ٧ د» أو لصالح «ب ٨ (جـ ٧ د)» فتصبح:

إما أن جونز جاء وبقي سميث أو غادر روبنسون،

جاء جونز وإما بقي سميث أو غادر روبنسون.

يمكننا أن نشير، أيضًا، إلى التركيب في اللغة العادية بإدخال شبه جملة من قبيل «من الصدق أن» تستجيب لـ «أن» أخرى لتبيان ترابط الجمل. كما يُمكن اللجوء إلى إجراء آخر يكمُن في إدخال حروف التأكيد من قبيل «آخر» بعد «أو»، أو «أيضًا» أو «علاوة على ذلك» بعد «و». ينتج عن مثل هذه التقوية للرابط اعتباره رابطًا أساسيًا.

أصبح واضحًا أن الترميز الاصطناعي في المنطق والرياضيات يتمتع بامتياز كبير على اللغة الطبيعية، باستعماله للأقواس للتعبير عن التركيب. فالأقواس تبين، بلا خطإ ممكن، التراكيب، وتُستعمل ببساطة. علاوة على ذلك، تمتاز الأقواس بالسماح بحذف العبارات المركبة آليًا من دون تحريف الجملة أو السياق. كان لهذا الامتياز الخاص أهمية لا تُقدَّر، إذ من دونه لم يكن لتطور الرياضيات أن يتجاوز أبدًا المرحلة الأوَّلية.

ومع ذلك، يُمكن للأقواس أن تشكل عائقًا. فإذا لم نسلم بمواضعات معينة لحذف بعضها، ستنحو صيغنا الطويلة إلى التأثر بذلك، فنضطر

لتعدادها بغية تركيبها في أزواج. هناك، بالفعل، مواضعتان لاختزال الأقواس استعملناهما ضمنيًا في الصفحات السابقة: وقد آن الأوان لذكرهما. المواضعة الأولى هي: تعامل الروابط «V»، و«→»، و«↔» كروابط تدلّ على انقطاع أقوى من الوصل. وهكذا تدلّ «ب ٨ جـ V د» على التركيب «(ب ٨ جـ) V د» وليس «ب ٨ (جـ V د)»، كما تقترحه الكتابة المطبعية بشكل جيّد. وبالمثل نجد أن «ب V جـ ٨ د» تُكافِئ «ب V (جـ ٨ د)»، و«ب ٨ جـ → د» تُكافِئ «(ب ٨ جـ) → د»، إلخ. أما المواضعة الثانية التي اعتمدناها ضمنيًا فهي: يؤثر رمز النفي في الجزء الأصغر الذي يليه. وبذلك فإن الصيغة «¬(ب ٨ جـ) ٨ د» تُكافِئ «(¬(ب ٨ جـ) ٨ د)»، ولا تُكافِئ «¬((ب ٨ جـ) ٨ د)»: وبالمثل نجد الصيغة «¬(ب V جـ) ٨ د» تُكافِئ «(¬(ب V جـ)) ٨ د»، ولا تُكافِئ «¬((ب V جـ) ٨ د)»: وهلم جرًا.

سنعتمد، الآن، ترميزًا مساعدًا يتكوّن من النقط، يؤدي إلى حذف كل الأقواس في الباب الأول، باستثناء تلك التي ترتبط مباشرة بالنفي. قد يبدو أن هذا الإجراء سيقلص الأقواس أكثر من اللازم: والواقع أن فائدته الأساسية تكمُن في إفساح المجال لإدخال الأقواس في الباب الثاني وما بعده.

تحوز النقط دور التقوية. ويمكن تصورها كنظير منهجي لاستعمال اللغة العادية، التي أشرنا إليها من قبل، والتي تقتضي إدخال الألفاظ «آخر» و«أيضًا»، إلخ. بداية، إذا كنا نريد أن ننقل دلالة «ب ٨ (جـV د)» وأن نقيم قطيعة أقوى على مستوى الوصل منها على مستوى الفصل، فعلينا أن ندخل النقطة على الوصل فنحصل على: «ب .٨ جـ V د». وبالنسبة إلى «(ب V جـ) .٨د»، يجب أن نكتب بالمثل «ب V جـ ٨. د»؛ وبالنسبة إلى «ب ٨ (جـ → د)» يجب أن نكتب «ب .٨ جـ → د»، إلخ.

وعندما نود خلق فاصل أقوى في بعض مواضع الوصل علينا أن نضع نقطتين «:» وإذا أردنا خلق فاصل أكبر منه أقوى من ذلك المُعبَّر عنه بوضع

النقط بجانب الروابط: «V»، أو«←»، أو«↔ »، فيجب أن نعبرعن الوصل. أما إذا أردنا خلق فاصل أقوى من هذا الأخير في مستوى الرابط «V»، أو «←»، أو «↔» سنضع نقطتين بجانب كل واحد منها، وهكذا دواليك حتى نبلغ عددًا أكبرمن النقط. ما يُمكن أن نكتبه باستعمال الأقواس فقط نحو:

عـ V (ب ∧ (جـ ← د) ↔ (ب V جـ) ∧ د) ∧ ط،

نستطيع أن نكتبه باستعمال النقط كالآتي:

عـ V: ب ∧. جـ ← د .↔. ب V جـ∧. د ∧: ط.

وعلى العموم، تحوز الروابط «V»، و«←»، و«↔» الوضع نفسه. كل مجموعة نقط توضع بجانب أي من هذه الروابط تمثل فاصلًا أقوى من ذلك الممثل من قبل العدد نفسه من النقط التي تمثل بمفردها علامة الوصل، لكنها تمثل أيضًا فاصلًا أقل قوة من الذي تمثله مجموعة أكبرمن النقط.

سنستمرفي استعمال الأقواس للإحاطة بعبارة يدخل علها رمز النفي؛ وعليه تظل الترميزات «⌐(ب ∧ جـ)»، و«⌐(ب V جـ)»، وغيرها بلا تغيير. بالطبع لا تحوز النقط القدرة على تجاوز الأقواس: فمثلًا في العبارة «⌐(ب V جـ∧. د) ∧ هـ»، تعجزالنقطة عن الجمع بين «ع» و«د».

[1]⌉لا نحتاج بتاتًا للأقواس أو أي مؤشر تجميع آخر إذا كتبنا، حسب لوكازفيتش، كل رابط في مقدمة العبارات التي يربطها بدل أن نكتبه بينها. وقد رمزلوكازفيتش إلى «ب ∧ جـ»، و«ب V جـ»، و«ب ← جـ»، و«ب ↔ جـ»، «⌐ب»، كالآتي: «Kpq» و«Apq»، و«Cpq»، و«Epq»، و«Np». وهكذا تصير العبارة الفصلية (2) أعلاه على الشكل الآتي:

(3) AsKEKpCqrKApqrt.

هذا التركيب فريد ولا مفرمنه. إذ تدلّ A الأولى على أن العبارة برمتها فصلية

(1) يُمكن حذف النص المُعلَّم بمعقوفين من أجل درس مختصر.

مكونها الأول هو «S» ومكونها الثاني هو ما تبقى من العبارة. و أما «K» التي تليها فتدل على أن الباقي عبارة وصلية. بحيث إن المكون الأول لهذا الوصل، من منظور «E» الذي تليه، عبارة تشارطية. فإذا سرنا على هذا النحو، سنحصل على البنية المتوخاة برمتها.

لم نأخذ في الحسبان الموصولات التي تتكون من مكونين فقط، بل حتى تلك التي تتكون من أي عدد، وهو ما يسري على المفصولات أيضًا. ويجب أن نقلص من هذه الحرية الكامنة في ترميز لوكازفيتش؛ وهكذا، يُمكن أن نرمز إلى «ب ∧ جـ∧ د» إما: «KpKpr»، التي تعني «ب. ∧ جـ ∧ د» : أو«KKpqr»، التي تعني «ب∧ جـ. ∧ د»؛ وهما تعبيران متُكافِئان؛ بَيْد أنه ينبغي أن تكتب إما بهذه الكيفية أو تلك، وليس فقط «Kpqr». وعلى المنوال نفسه ينبغي أن نكتب « ب∨ جـ∨ د» كالآتي: «ApAqr» أو«AApqr». سيفسح قبول «Kpqr» أو«Apqr» المجال أمام الالتباس من النوع الموالي: «KApqrs» التي قد تعتبر إمّا «K(Apqr)s»، أي «ب∨ جـ ∧د∧ هـ»، وإمّا «K(Apq)rs»، أي «ب∨ جـ. ∧د ∧ ع». وسيكون هذا الالتباس مهمًّا، فقد يجد القارئ إسنادًا لقيم صدقية لكل من «ب»، و«جـ» و«د»، و«ع» يجعل «ب∨ جـ . ∨د ∧. ع» صادقة و«ب ∨ جـ. ∧د ∧ ع» كاذبة.

يتمتع ترميز لوكازفيتش بنحو بسيط بشكل رائع. فما هي متواليات الحروف التي ستشكّل صيغًا متناسقة؟ «Cpq»، نعم؛ «ApNKpq»، نعم؛ (3)، نعم؛ «pKpNq» لا؛ «ApKq» لا. وإليك اختبار بسيط يعود كذلك إلى لوكازفيتش: عندما نحسب من بداية الصيغة، لنحدد عدد مواقع أحرف القضايا («ب» و«جـ»، إلخ.)، وعدد الروابط الاثنانية («A»، «K»، «E»، «C»). تفوق مواقع الأحرف القضوية عدد مواقع الروابط عندما تبلغ نهاية الصيغة، وليس قبل ذلك. أترك للقارئ أمر اقتناعه بهذه القاعدة عبر اختبارها بنفسه.

إن هذا الترميز جدير بالاهتمام النظري. فقد برهن على فائدته في برمجة الحواسيب؛ غير أن استعمال النقط والأقواس يبدو أكثر وضوحا.

قد يميل الطلبة، بداعي الاقتصاد، إلى الاهتمام بمواضعات استعمال النقط. فيشيرون، مثلا، إلى أن الصيغة «ب∨ . جـ↔. د ∨ ع» قد تقوم مقام ترميزي « ب ∨: جـ↔. د ∨ ع»؛ إنها لا تقبل، بالفعل، سوى التأويل المرغوب فيه «ب∨ (جـ↔. د ∨ ع)» ما دام أن «ب ∨. جـ ↔) د ∨ هـ» لا معنى لها. لا ينصح بمثل هذه الترميزات المقتصدة. إذا سرّع استعمال نقطة إضافية القراءة، فإنه سيبرر وجوده. وعندما تكون الأناقة هي مبتغانا، فقد نحصل عليها بالتمام عبر تبني ترميز لوكازفيتش.

لمحة تاريخية: شاع استعمال الرِّباط (vinculum)، خلال القرن الخامس عشر والسادس عشر والسابع عشر، في الكتابات الرياضية للإشارة إلى التركيب. وهو عبارة عن خط يوضع تحت أو فوق. وبذلك يُمكن أن نعبر عن: «ب ∨: جـ↔. د ∨ ع» كالآتي: «ب ∨ جـ ↔ د ∨ ع». يعود استعمال النقط إلى بيانو واعتمده كل من وايتهيد وراسل، وبعض المناطقة اللاحقين، بمواضعات متباينة. أما ترميز لوكازيفيتش فيعود إلى سنة 1939[1]

تمارين

1. بيّن كيف يُمكن أن نحوّل العبارة الملتبسة التالية:

سيعزف جون أو سيغني جون وستغني ماري.

إلى عبارة غير ملتبسة، بالنسبة إلى كل واحد من معنيها، باختزال مكوناتها.

2. عيّن وعلِّل التركيب المناسب بالنسبة إلى العبارة:

(1) راجع تارسكي:
A. Tarski, *Logic, Semantics, Metamathematics*. P. 39.

إما يجففون المستنقع ويعيدون فتح الطريق أو يعمقون الميناء،
سيوفرون لسكان الجبل سوقًا ولأنفسهم تجارة نشيطة.

3. **أعد كتابة ما يلي باستعمال النقط:**

(ب∧ (جـ ∨ د) ← ع) ↔ (ب ∧ جـ ← ع) ∧ (ب ∧ د ← ع)،

¬(ب ∨ ج) ∧ (د ∨ هـ) ← ¬(ب ∨ ج) ∧ ع

4. **أعد كتابة ما يلي باستعمال الأقواس:**

ب ←. جـ ∨ د ∧. ب ∨ جـ ∧ ع : ↔ :. ¬جـ ∧ ¬د ∨ . ¬ب ∧. ¬جـ ∨

¬ع: ← ¬ب.

5. **أعد كتابة الصيغ الثلاث السابقة باعتماد كتابة لوكازفيتش.**

5 التحليل الصدقي

لقد سبق أن قُلنا، في الفصل الثاني، إن العبارة المركبة تعتبر دالة صدقية لمكوناتها عندما تحدد قيمتها الصدقية بواسطة القيم الصدقية لمكوناتها؛ وقد تبين أن الوصل والنفي يشكّلان ترميزًا ملائمًا للدوال الصدقية. وعلى ضوء ذلك، من الطبيعي والمناسب أن نتصور، في ما سيأتي، مفهوم الدالة الصدقية بأسلوب ترميزي بسيط: إن الدوال الصدقية لعبارات معطاة هي كل العبارات التي نبنيها انطلاقًا منها بواسطة النفي والوصل فقط (فضلًا عن الروابط غير الضرورية: «V»، و«→»، و«↔»). وبذلك تعد «¬ب» دالة صدقية لـ «ب» و«¬(ب V ¬د .↔ ب ∧ ج) → د» دالة صدقية لكلٍّ من «ب» و«ج» و«د». ونعتبر «ب» نفسها دالة صدقية لـ «ب».

ليست الدالة الصدقية للأحرف «ب» و«ج» إلخ، بطبيعة الحال عبارة بالمعنى الدقيق للكلمة، لأن الأحرف ليست في حد ذاتها عبارات حقيقية بالطبع، بل مجرد بديل يُمكن أن نتخيل مكانه أي عبارة نريد. سنسمي مستقبلًا الأحرف «ب»، «ج»، إلخ، وكل دوالها الصدقية صورًا (مفرد: صورة). وبتعبير أدق، سنطلق عليها صور الدوال الصدقية كلما اضطررنا إلى تمييزها عن الصيغ التي تتضمن إجراءات منطقية تختلف عن تلك الخاصة بالدالة الصدقية. تعتبر الصور خطاطات منطقية من العبارات: تعمل الأحرف «ب» و«ج»، إلخ، التي نستبدلها بالجمل المكوِّنة للعبارة، على حذف كل الجزء الداخلي الذي ليس وثيقَ الصلة بالبنيات الخارجية الكبرى التي تمثل موضوع دراستنا المنطقية.

يمكن أن نفهم من تأويل الحرف «ب» (أو «ج»، إلخ) تعيين عبارة واقعية نتخيلها في موضع هذا الحرف. ويمكن أن نفهم من تأويل الحرف «ب» أيضًا مجرد تعيين لقيمة صدق «ب». كما يُمكن استعمال هذين المعنيين لـ «التأويل» بشكل تبادلي لأن كل عبارة واقعية «عا» تحوز قيمة صدقية خاصة (معروفة أو مجهولة) وأن هذه القيمة الصدقية هي كل ما يهم بالنسبة إلى القيمة الصدقية لدالة صدق «عا».

يختصر منهج الكتابة الملائم لإسناد التأويلات، المنتمية إلى النوع الثاني من الأنواع الواردة أعلاه، ببساطة في استبدال العلامة «ص» بأحرف الصيغة بالنسبة إلى الصدق، و«ك»[1] بالنسبة إلى الكذب. نستطيع بسرعة أن نحدد، إذا حسبنا مباشرة هذه العلامات، القيمة الصدقية للصيغة برمتها بالنسبة إلى التأويلات المسندة[2]. وعليه، هب أن مشكلتنا تكمُن في تحديد القيمة الصدقية للصورة «¬(ب ٨ جـ V ¬ب ٨ ¬ج) بحيث تسند إلى «ب» قيمة الصدق وإلى «ج» قيمة الكذب. سنضع ببساطة «ص» مكان «ب»، و«ك» مكان «ج» في الصور، فنحصل على «¬(ص ٨ ك V ¬ص ٨ ¬ك)». وحيث إن «¬ص» تختزل إلى «ك»، و«¬ك» تختزل إلى «ص»، فإننا سنحصل على «¬(ص ٨ ك V ك ٨ ص)». وبما أن الوصل يكذب متى كذب أحد موصوليه، فإن «ص ٨ ك» تختزل إلى «ك» وكذلك شأن «ك ٨ ص». هكذا تغدو الصيغة كلها كالآتي: «¬(ك V ك)»؛ وحيث إنَّ الفصل يكذب عندما يكذب مفصولوه، فإن «ك V ك» تختزل إلى «ك»، وبذلك تصبح الصيغة برمتها هي:« ¬ك» أو «ص». تعني هذه النتيجة أن

(1) يستعمل كواين الرمز «⊤» بدل «ص» والرمز «⊥» بدل «ك». لأنه يمثل الحرف الأول من لفظ «صادق» في اللغة الإنجليزية (Truth) والثاني قلب له. أي يدل على الكذب. لذلك فضلنا استعمال الرمزين: «ص» و«ك» لدلالتهما على المعنيين نفسهما في اللغة العربية. [المترجم]

(2) لا جدوى من البحث عن كيفية نطق «ص» في علاقتها بـ «ك». وذلك لأن اللفظين «صادق» و«كاذب» مختصران بما فيه الكفاية أيضًا ليستعملا بشكل مناسب كنطق للرمزين «ص» و«ك».

الصورة الأصلية «⌐(ب∧جـ ∨ ⌐ب∧⌐جـ)» صادقة عندما نسند إلى «ب» و«جـ» قيمتي الصدق والكذب على التوالي.

سنسمي العملية التي تختزل بواسطتها «⌐(ص ∧ ك ∨ ⌐ص ∧ ⌐ك)»، إلى «ص» البتّ. ستكون أبسط الخطوات جدًّا المتبعة في البتّ، أي اختزال «⌐ص» إلى «ك» و«⌐ك» إلى «ص»، بشكل ضمني في ما سيأتي؛ لن نكتب أبدًا «⌐ص» و«⌐ك»، بل نكتب مباشرة «ك» و«ص»، كما لو أن رمز النفي يقتصر، عندما نطبقه على «ص» وعلى «ك»، على القلب فقط. شكلت عمليات البتّ الواردة في المثال السابق اختزالًا لـ «ص ∧ ك» و«ك ∧ ص» و«ك ∨ ك» إلى «ك». هذه العمليات وغيرها من التي يُمكن أن تُعمل في أمثلة أخرى، يُمكن أن نصوغها في تسع قواعد للبتّ بالتحليل الصدقي هي:

(1) **احذف «ص» إذا كانت أحد طرفي الوصل.** (وعليه تختزل «ص ∧ ص ∧ ص» إلى « ص ∧ ص»، وبالتالي إلى «ص»، إلخ. السبب: يصدق أو يكذب الوصل الذي يكون أحد موصوليه صادقًا تبعًا لصدق أو كذب باقي موصولاته).

(2) **احذف «ك» إذا كانت أحد مفصولات الفصل.** (وعليه تختزل الصيغة «ك ∨ ك ∨ ك» إلى «ك ∨ ك» ثم إلى «ك»، إلخ. السبب: يصدق أو يكذب الفصل، الذي يكون أحد مفصوليه كاذبًا، تبعًا لصدق أو كذب باقي مفصولاته).

(3) **اختزل الوصل الذي تكون إحدى موصولاته «ك» إلى «ك».**

(4) **اختزل الفصل الذي تكون إحدى مفصولاته «ص» إلى «ص».**

(5) **احذف «ص» إذا كانت مقدمًا لعبارة شرطية.** (السبب: يصدق أو يكذب الشرط الذي يكون مقدمه صادقًا تبعًا لصدق أو كذب التالي).

(6) **اختزل الشرط الذي يكون مقدمه «ك»، أو تاليه «ص»، إلى «ص».** (وهكذا فإن «ص ← ص» و«ك ← ص»، و«ك← ك»، تختزل إلى «ص».

(7) إذا كانت «ك» تالي الشرط، اختزل المجموع إلى نفي المقدم.

(8) احذف «ص» إذا كانت تشكل أحد طرفي التشارط. (وعليه تختزل «ص ↔ ص» إلى «ص»، وتختزل «ص ↔ ك» و«ك ↔ ص» إلى «ك»).

(9) احذف «ك» إذا كانت أحد طرفي التشارط وقم بنفي الطرف الآخر (وعليه تختزل «ك ↔ ك» إلى «ص»، وتختزل «ص ↔ ك» و«ك ↔ ص» إلى «ك»).

دعونا نبت في المثال السابق وفق قواعد البتّ بالتحليل الصدقي المذكورة كالآتي:

⌐(ص ∧ ك ∨ ك ∧ ص)

⌐(ك∨ ك) (عن طريق استبدال «ك» بـ «ص ∧ ك» و«ك ∧ ص» طبقا لقاعدتي (1) و(3))

ص (عن طريق استبدال «ك» بـ«ك ∨ ك» طبقًا للقاعدة (2))

ولننتقل الآن إلى مثال أكثر تفصيلًا، لنبت في القيمة الصدقية للعبارة: «ب ∧ جـ ∨ ⌐ب ∧ ⌐د .←. جـ ↔ د» بحيث تكون «ب» و«جـ» كاذبتين و«د» صادقة:

ك ∧ ك ∨ ص ∧ ك .←. ك ↔ ص

ك ∧ ك ∨ ص ∧ ك .← ك (استبدال «ك» بـ«ك ↔ ص» طبقًا للقاعدة (8) أو (9))

⌐(ك ∧ ك ∨ ص ∧ ك) (طبقا للقاعدة (7))

⌐(ك ∨ ك) (طبقا للقاعدة (3) مرتين)

ص (استبدال «ك» بـ «ك ∨ ك» طبقًا للقاعدة (2))

وهكذا تصبح العبارة «ب ∧ جـ ∨ ⌐ب ∧ ⌐د .←. جـ ↔ د» صادقة إذا عوضنا «ب» و«جـ» بعبارتين كاذبتين؛ و«د» بعبارة صادقة.

فلنربط الصلة بالواقع من خلال افتراض عبارة واقعية ذات الصيغة «ب ∧ جـ ∨ ¬ب ∧ ¬د .←. جـ ↔ د»:

(1) إما يستقيل العامل والنائب معًا أو أن العامل لن يستقيل ولن يتخلّى عن القائم بالأعمال، في كلا الحالتين سيستقيل النائب إذا وفقط إذا تخلى العامل عن القائم بالأعمال.

يتبين أن الصيغة (1) تصدق عندما لا يستقيل العامل والنائب وعندما يتخلى العامل عن القائم بالأعمال.

لقد قمنا بالتقويم الصدقي للصورة «ب ∧ جـ ∨ ¬ب ∧ ¬د .←. جـ ↔ د» بالنسبة إلى تأويل واحد مؤدّاه: «ب» و«جـ» كاذبتان و«د» صادقة. في حين تظل هناك سبع تأويلات أخرى جديرة بالاهتمام من بينها: عندما تصدق «ب» و«جـ» و«د» معًا؛ وعندما تصدق «ب» و«جـ» وتكذب «د»، وعندما تصدق «ب» و«د»، وتكذب «جـ»، وهكذا دواليك. ويمكن أن نعالج الحالات الثماني بكيفية منظمة، مع تقويم الصورة بالنسبة إلى كل حالة، وذلك بواسطة طريقة البتّ الآتية: نعوض بداية «ب» بـ «ص»، ونترك «جـ» و«د» على حالهما، ثم نجري كل الخطوات الممكنة طبقًا للقواعد (1)- (9):

ص ∧ جـ ∨ ك ∧ ¬د .←. جـ ↔ د

جـ ∨ ك ∧ ¬د .←. جـ ↔ د (عوضنا «ص ∧ جـ» بـ «جـ» طبقًا للقاعدة 1).

جـ ∨ ك .←. جـ ↔ د (عوضنا «ك ∧ ¬د» بـ «ك» طبقًا للقاعدة 3).

جـ ←. جـ ↔ د (عوضنا «جـ ∨ ك» بـ «جـ» طبقًا للقاعدة 2).

ثم نضع «ص» محل «جـ» في هذه النتيجة، ونستمر في التحليل فنحصل على ما يلي:

ص ←. ص ↔ د

ص ↔ د (طبقا للقاعدة 5)

د (طبقا للقاعدة 8)

هكذا يتبين أنه متى كانت «ب» و«جـ» صادقتين، تُرد الصورة الأصلية إلى «د»، وبالتالي يتوقف صدقها أو كذبها على صدق أو كذب «د». وهو ما يعفينا من حالتين من الحالات الثمانية. لنعد الآن إلى نتيجتنا الوسطى «جـ ←. جـ ↔ د»، ولنضع «ك» محل «جـ»:

ك ←. ك ↔ د

ص (طبقا للقاعدة 6)

مما يبرهن على أن صورتنا الأصلية تصدق متى صدقت «ب» وكذبت «جـ» بغض النظر عن القيمة الصدقية لـ «د». وهو ما يعفينا من حالتين أخريين من الحالات الثماني. والآن لنعد إلى صورتنا الأصلية، فنضع «ك» مكان «ب»:

ك ∧ جـ ∨ ص ∧ ~د . ←. جـ ↔ د

ك ∨ ص ∧ ~د . ←. جـ ↔ د (طبقا للقاعدة 3)

ص ∧ ~د ←. جـ ↔ د (طبقا للقاعدة 2)

~د ←. جـ ↔ د (طبقا للقاعدة 1)

وإذا وضعنا «ص» مكان «د»، ثم تابعنا تحليلنا، سنحصل على:

ك ←. جـ ↔ ص

ص (طبقا للقاعدة 6)

وهو ما يبرهن على أن صورتنا الأصلية تصدق متى كانت «ب» كاذبة و«د» صادقة بغض النظر عن القيمة الصدقية لـ «جـ». وبذلك نتخلص من حالتين جديدتين. وأخيرًا، لنعد إلى الصيغة «~د . ←. جـ ↔ د» ولنضع «ك» بدل «د»:

ص ←. جـ ↔ ك

جـ ↔ ك (طبقا للقاعدة 5)

~جـ (طبقا للقاعدة 9)

وهكذا، كلما كانت «ب» و«د» كاذبتين معًا، تؤول صورتنا إلى «~جـ»،

وبالتالي يتوقف كذبها أو صدقها على صدق أو كذب «جـ».

لقد كان من الممكن أن ننجز هذا التحليل بشكل ملائم من خلال جدول واحد كما يلي:

ب ∧ جـ ∨ ¬ب ∧ ¬د .←. جـ ↔ د

ص ∧ جـ ∨ ك ∧ ¬د .←. جـ ↔ د   ك ∧ جـ ∨ ص ∧ ¬د .←. جـ ↔ د

جـ ∨ ك ∧ ¬د .←. جـ ↔ د   ك ∨ ص ∧ ¬د .←. جـ ↔ د

جـ ∨ ك .←. جـ ↔ د   ص ∧ ¬د ←. جـ ↔ د

جـ ←. جـ ↔ د   ¬د .←. جـ ↔ د

ص ←. ص ↔ د	ك ←. ك ↔ د	ك ←. جـ ↔ ص	ص ←. جـ ↔ ك
ص ↔ د	ك	ص	جـ ↔ ك
د			¬جـ
ص ك	ك	ص	ص ك
ص ك	ك	ص	ص ك

يصطلح على هذا الجدول التحليل الصدقي. يُمكن أن نختصر الطريقة العامة على النحو الآتي: نضع بداية جدولين واحد نسند فيه قيمة الصدق ثم الكذب إلى متغير قضوي نختاره، وليكن «ب». فنجعل بذلك من العبارات المصوغة بهذا الشكل منطلقًا لتحليل ثنائي. ثم نقوم بتحليل العبارتين، باعتماد القواعد التسع (1)- (9)، إلى أن نحصل على «ص» أو «ك» أو على صورة معينة. وإذا كانت آخر خطوة عبارة عن صيغة قضوية، فإننا نلجأ إلى تطوير تحليل ثنائي جديد، انطلاقًا من هذه الصيغة، بعد اختبار أحد أحرفها. ونواصل بهذه الطريقة إلى أن نحصل في النتائج النهائية على علامتين مفردتين هما «ص» أو «ك». تبين كل نتيجة نهائية القيمة الصدقية التي تحوزها الصيغة الأصلية عندما نسند إلى أحرفها تأويلًا مطابقًا للعلامتين اللتين عوضناها بهما.

الواقع أن كل خطوات التحليل الوسطي واضحة جدًّا ومبنية بشكل أولي إلى حد يُمكن أن نتركها في ما سيأتي للخيال. وهكذا سيتم تكثيف التحليل الصدقي السابق مستقبلًا كالآتي:

ب ∧ جـ ∨ ¬ب ∧ ¬د .←. جـ ↔ د

ص ∧ جـ ∨ ك ∧ ¬د .←. جـ ↔ د   ك ∧ جـ ∨ ص ∧ ¬د .←. جـ ↔ د

جـ ←. جـ ↔ د   ¬د .←. جـ ↔ د

ص ←. ص ↔ د   ك ←. ك ↔ د   ك ←. جـ ↔ ص   ص ←. جـ ↔ ك

د   ص   ص   ¬جـ

ص   ك   ك   ص

ص   ك   ص   ص   ك   ص

ليس من اللازم أن نبتدئ دائمًا بالحرف «ب» كأول متغير قضوي نعوضه بـ «ص» و«ك»، إذ من الأفضل أن نختار المتغير الذي يتكرر أكثر في العبارة، وأن نتبع المبدأ نفسه في كل المراحل اللاحقة. ولهذا السبب اخترنا أثناء إنجاز المرحلة الثانية في الخانة اليمنى من جدول التحليل «جـ» لنعوضها بـ «ص» و«ك»، في حين أننا اخترنا في المرحلة الثانية في الخانة اليسرى «د». تمتاز هذه الاستراتيجية بتسريع اختفاء الأحرف، وبالتالي التقليل من الجهد.

[هناك طريقة للتحليل الصدقي كانت متداولة في الأدبيات المنطقية هي طريقة **الجداول الصدقية**. سيكون الجدول الصدقي بالنسبة إلى العبارة التي تم تحليلها صدقيًا من قبل: «ب∧جـ ∨ ¬ب ∧ ¬د .←. جـ ↔ د» كالآتي:

ب	جـ	د	ب ∧ د	¬ب	¬د	¬ب ∧ ¬د	ب ∧ جـ ∨ ¬ب ∧ ¬د	جـ ↔ د	ب ∧ جـ ∨ ¬ب ∧ ¬د . ← . جـ ↔ د
ص	ص	ص	ص	ك	ك	ك	ص	ص	ص
ك	ص	ص	ك	ص	ك	ك	ك	ص	ص
ص	ك	ص	ك	ك	ك	ك	ك	ك	ص
ك	ك	ص	ك	ص	ك	ك	ك	ك	ص
ص	ص	ك	ص	ك	ص	ك	ص	ك	ك
ك	ص	ك	ك	ص	ص	ص	ص	ك	ك
ص	ك	ك	ك	ك	ص	ك	ك	ص	ص
ك	ك	ك	ك	ص	ص	ص	ص	ص	ص

تستنفد الأعمدة الأولى كل إسنادات القيم الصدقية للأحرف. وتقوم الأعمدة الموالية بجرد القيم الصدقية لمكونات الصور التي تزداد تعقيدًا بالنسبة إلى كل إسناد لقيمة صدقية إلى الأحرف على حدة. يشتق كل عمود من هذه الأعمدة المتوالية من الأعمدة السابقة بإعمال استدلال مكافئ لما أطلقت عليه اسم البتّ بالتحليل.

من الممكن إنشاء الجدول الصدقي السابق بطريقة أكثر اختصارًا على النحو التالي:

ب ٨ جـ			٧	¬ب ٨ ¬د			←.	جـ↔ د		
ص	ص	ص	ص	ك	ك	ك	ص	ص	ص	ص
ك	ك	ص	ك	ص	ك	ك	ص	ص	ص	ص
ص	ك	ك	ك	ك	ك	ك	ص	ك	ك	ص
ك	ك	ك	ك	ص	ك	ك	ص	ك	ك	ص
ص	ص	ص	ص	ك	ك	ص	ك	ص	ك	ك
ك	ك	ص	ص	ص	ص	ص	ك	ص	ك	ك
ص	ك	ك	ك	ك	ك	ص	ص	ك	ص	ك
ك	ك	ك	ص	ص	ص	ص	ص	ك	ص	ك

نشرع في هذا البناء عبر كتابة العبارة ثم نثبت الأعمدة المناسبة تحت أحرفها الفردية ونفيها. وبعد ذلك، نشتق عمود « ب٨جـ»، الذي ننشئه تحت وسط ذلك الوصل. ونفعل الشيء نفسه بالنسبة إلى « ¬ب ٨ ¬د» و«جـ↔ د». ثم نشتق عمود الفصل فننشئه تحت «٧»؛ وفي الأخير نبني عمود العبارة برمتها تحت الرابط الأسامي «←».

غير أن الترميز الفرعي للتحليل الصدقي الذي توصلنا إليها قبل حين ما يزال، كما نلاحظ، أكثر اختصارًا من هذا الجدول الصدقي المدمج. فالاختصار يزداد بشكل ملحوظ عندما يزداد عدد الأحرف المختلفة، وهذا ما يُمكن أن يتحقق منه القارئ بالتجربة. فبالنسبة إلى أربعة أحرف، يرتفع عدد الأسطر في الجدول الصدقي إلى ستة عشر سطرًا؛ ويبلغ بالنسبة إلى خمسة أحرف اثنين وثلاثين سطرًا. ويزداد الاختصار أيضًا، كما هو الحال في الفصل الموالي، عندما يسعى التحليل، بالخصوص، إلى الاتساق أو الصحة؛ لأن هذه المسائل لا تتم الإجابة عنها بواسطة فقط باستعمال الجداول الصدقية إلا إذا كانت الجداول مكتملة تقريبًا، في حين أن الجواب

غالبًا ما يُعطَى مبكّرًا عندما نستعمل الطريقة الفرعية للتحليل الصدقي.

لمحة تاريخية: تعود صورة الاستدلال التي تُوظَّف في الجداول الصدقية إلى فريغه، وبيرس وشرويدر حوالي 1880. وقد لعبت جداول الصدق دورًا أساسيًّا في الأدبيات المنطقية منذ 1920 (لوكازيفيتش، وبوست (Post)، فيتغينشتاين (Wittgenstein)). أما الطريقة المختصرة التي عرضناها في الأخير فمستمدة من كتابي المنطق الرياضي (Mathematical logic)، 1940. ⌊

تمارين

1. هب أنهم يجففون المستنقع، لكنهم لا يفتحون الطريق ولا يعمقون الميناء ولا يوفرون لسكان الجبل سوقًا؛ ولنفرض مع ذلك أنهم يضمنون لأنفسهم تجارة نشيطة.

   حدد، ضمن هذه الشروط، القيمة الصدقية للعبارة الواردة في التمرين (2) من الفصل السابق.

   الطريقة: عَوِّض المكونات بالأحرف «ب» و«ج» و«د» «ضـ» و«ط»، وضع «ص» و«ك» بشكل مناسب مكان الأحرف؛ ثم قم بالبت.

2. هب أنهم لا يجففون المستنقع، ولا يفتحون الطريق، لكنهم يعمقون الميناء ويوفرون لسكان الجبل سوقًا في الوقت نفسه، بينما لا يضمنون لأنفسهم تجارة نشيطة. ماذا ستكون القيمة الصدقية للعبارة في التمرين الثاني من الفصل السابق؟

3. قم بالبت في العبارات الآتية، كل واحدة على حدة، عن طريق التحليل الصدقي:

ب ← ب ∧ ج؛ ب ←. ب ∨ ج؛ ب ←. ب ← ج؛ ب ←. ب ↔ ج

قم بعرض خطوات التحليل برمتها مبرزًا الخطوات الوسطى؛ ثم علِّم بعد ذلك الأسطر الوسطى التي يجب أن تحذف، كي تبين الحال الذي سيكون عليه التحليل بالأسلوب المختصر.

4. قم بتحليل صدقي للصورة «ب ← جـ ٨. جـ ← د»، على سبيل المقارنة، أولًا باتباع الخطة التي تكمُن في اختيار الحرف الأكثر تكرارًا ثم بإهمال هذه الخطة.

6 الاتساق والصحة

تكون دالة صدقية مُتَّسقة إذا صدقت بالنسبة إلى تأويل معين لأحرفها القضوية؛ وإلا تكون غير متسقة (متناقضة). وتكون الدالة الصدقية صحيحة إذا صدقت بالنسبة إلى كل التأويلات الممكنة لأحرفها. فالعبارة «ب ٨ ¬ج» مثلًا، متسقة لأنها تصدق عندما نسند إلى «ب» الصدق وإلى «ج» الكذب؛ لكنها ليست عبارة صحيحة، نظرًا لوجود تأويلات أخرى لـ «ب» و«ج» تجعلها كاذبة.

إن طريقة البتّ في صحة واتساق دالة صدقية معينة واضحة: نطبق التحليل الصدقي ونتأكد من حصولنا على «ص» في كل الحالات (وهو ما يُبرهن على صحة العبارة)، أو على «ك» في كل الحالات (وهو ما يبرهن على عدم اتساق العبارة)، أو يجمع بين الصدق والكذب. وإليكم مثالان عن الصحة والتناقض هما على التوالي «ب ← ب» و«ب ٨ ¬ب»:

ب ← ب		ب ٨ ¬ب	
ص ← ص	ك ← ك	ص ٨ ك	ك ٨ ص
ص	ص	ك	ك

وهناك عبارات صحيحة سبق استعمالها في موضع من الفصل الثاني، عندما عرضنا العبارة الآتية: «¬(ب٨ ¬ب ٨ جـ٨ د ٨ هـ)».

¬(ب∧ ¬ب ∧ جـ ∧ د ∧ ضـ)

¬(ص ∧ ك ∧ جـ ∧ د ∧ ضـ)　　　¬(ك ∧ ص ∧ جـ ∧ د ∧ ضـ)

ص　　　ص

من الواضح، بشكل عام، أن العبارة تكون صحيحة إذا وفقط إذا كان نفيُها متناقضًا؛ في حين تكون متناقضة إذا وفقط إذا كان نفيُها صحيحًا. وعليه فإن العبارتين المنفيتين: «¬(ب ∧¬ب)» و«¬(ب∧ ¬ب ∧ جـ ∧ د ∧ ضـ)»، اللتين هما نفيان للعبارتين المتناقضتين التاليتين: «(ب∧¬ب)» و«(ب∧ ¬ب ∧ جـ ∧ د ∧ ضـ)»، صحيحتان. أما نفي العبارة «¬(ب ←ب)» للعبارة الصحيحة «ب ←ب» فمتناقض.

ويُمكن التوقف عن البتّ في الصحة عند بلوغ نتيجة سلبية، بمجرد ما نصل إلى حالة ينتج عنها «ك»؛ ويمكن التوقف عن البتّ في الاتساق بنتيجة موجبة، بمجرد ما نصل إلى حالة ينتج عنها «ص». وهكذا كان من الممكن ترك تحليل العبارة: «ب ∧ جـ ∨ ¬ب ∧ ¬د. ← .جـ ↔ د»، في الفصل الخامس، لو أن الأمر كان يتعلق بالاتساق والصحة، في المرحلة غير المكتملة الآتية:

ب ∧ جـ ∨ ¬ب ∧ ¬د . ←. جـ ↔ د

ص ∧ جـ ∨ ك ∧ ¬د . ←. جـ ↔ د

جـ ←. جـ ↔ د

ص ←. ص ↔ د

د

ص　　ك

تكفي هذه المعالجة إلى حد كبير لتبيان أن العبارة: «ب ∧ جـ ∨ ¬ب∧ ¬د ←. جـ ↔ د» متسقة وليست صحيحة.

يجب ألّا نعتبر الصحة مدحًا. فعندما تكون عبارة ما صحيحة، يُمكن لكل عبارة ضمنها أن تكون، بهذا المعنى، مبتذلة. وستكون مبتذلة بمعنى أنها لا تنقل أية معلومة واقعية عن الموضوع الذي تتكلم عنه الجمل المكوّنة لها.

هب أن لدينا العبارة:

(1) إذا فاز فريق برونز، فإن فريق برونز فاز،

الذي يمثل شكلها الصيغة الصحيحة «ب ← ب»، فإنها لا تمدنا بأية معلومة عن نتيجة اللعبة: الواقع أنه يُمكن لأي جملة أو موضوع أن يستعمل هنا بدل «فريق برونز» من دون أي تأثير يُذكر. إنّ الصيغ الصحيحة مهمة ليس باعتبارها غاية، بل وسيلة. سيتبين في الصفحات القليلة المقبلة أن الحالات البسيطة للصحة تُزوّدنا بطرق مختصرة لتحليل صدق عبارات أخرى: وسنرى في الفصل الموالي أن تحديد بعض الحالات المركبة للصحة يرجع إلى تحديد علاقات اللزوم والتكافؤ بين الصيغ المختلفة.

رغم أن العبارات التي تمثل الصيغ الصحيحة تكون دائمًا مبتذلة بالمعنى المذكور أعلاه، فإنها لا تكون دائمًا مبتذلة بمعنى أنها تكون، مثلها مثل العبارة (1)، قابلة لأن تدرك مباشرة. ويمكن أن تبلغ الصيغ الصحيحة طولًا ودرجة تركيب غير محدودة، بل توجد صيغ لها طول معتدل لا يُمكن أن نتعرف على صحتها من دون القيام بحساب مهم. الشيء نفسه يسري على الاتساق. إليكم صيغة ذات تركيب معتدل يتم البتّ في صحتها بواسطة التحليل الصدقي، وإن كان يستحيل التعرف على قيمتها للوهلة الأولى.

ب ∧ جـ ∨ ب ∧ ¬د ∨ ¬ب ∧ د ∨ ¬ب ∧ ضـ ∨ ¬جـ ∧ د ∨ ¬د ∧ ¬ضـ

ص ∧ جـ ∨ ص ∧ ¬د ∨ ك ∧ د ∨ ك   ك ∧ جـ ∨ ك ∧ ¬د ∨ ص ∧ د ∨ ص ∧

∧ ضـ ∨ ¬جـ ∧ د ∨ ¬د ∧ ¬ضـ   ضـ ∨ ¬جـ ∧ د ∨ ¬د ∧ ¬ضـ

جـ ∨ ¬د ∨ ¬جـ ∧ د ∨ ¬د ∧ ¬ضـ   د ∨ ضـ ∨ ¬جـ ∧ د ∨ ¬د ∧ ¬ضـ

جـ ∨ ك ∨ ¬جـ ∧   جـ ∨ ص ∨ ¬جـ ∧   ص ∨ ضـ ∨ ¬جـ ∧   ك ∨ ضـ ∨ ¬جـ ∧

ص ∨ ك ∧ ¬ضـ   ك ∨ ص ∧ ¬ضـ   ص ∨ ك ∧ ¬ضـ   ك ∨ ص ∧ ¬ضـ

جـ ∨ ¬جـ   ضـ ∧ ¬ضـ

ص ∨ ك   ك ∨ ص   ص ∨ ك   ك ∨ ص

ص   ص   ص   ص   ص   ص

ص   ص   ص   ص

يبرهن التحليل على صحة العبارة، في حين أن فحصًا أكثر بساطة، بلا طريقة، سيكون أقل فعالية.

رغم ميزة الوضوح الفعلي لحالات الصحة وعدم الاتساق، سنختصر من الآن فصاعدًا تحليلاتنا الصدقية. نعلم الآن أن العبارتين «جـ ∨ ¬جـ» و«ضـ ∨ ¬ضـ»، اللتين ظهرتا أثناء تحليلنا السابق، صحيحتان، وبالتالي تُختزَل دائمًا إلى «ص» في جميع الحالات. وعليه نستطيع منذ الآن أن نتفق على رد مثل هذه النتائج مباشرة إلى «ص» دون إجراءات إضافية. وعليه، بدل العلامات:

جـ ∨ ¬جـ   ضـ ∨ ¬ضـ

ص ∨ ك   ك ∨ ص   ص ∨ ك   ك ∨ ص

ص   ص   ص   ص

التي تظهر في الأسطر السفلى من التحليل السابق، سنكتب مستقبلًا فقط ما يلي:

جـ ∨ ¬جـ   ضـ ∨ ¬ضـ

ص   ص

وعمومًا، يُمكن أن نختزل كل عبارة تكون صحتها ظاهرة بشكل مباشر إلى «ص» متى وردت في التحليل الصدقي، سواء أكانت معزولة أو مكوِّنًا من مكونات صيغة أطول. وبالمثل، يُمكن أن نرد كل عبارة ظاهرة التناقض مثل «ب ∧ ¬ب»، و«ب ∧ ¬ب ∧جـ∧ د ∧ ضـ» و«¬جـ ∧ ب ∧ جـ ∧ د»، إلخ، مباشرة إلى «ك» كلما وردت في التحليل.

وباستحضار هذه الأساليب المختصرة في الذهن، دعونا نحلل صيغة مركبة حقًّا:

ب ∨ جـ. ∧ ب ∨ ¬جـ. ∨ ¬ب ∧ جـ:↔ جـ: ←. ب ∧ د ∨ ب ∧ ¬د	
ص ∨ جـ. ∧ص ∨ ¬جـ. ∨ك ∧ جـ: ↔ جـ: ←. ص ∧ د ∨ ص ∧ ¬¬د جـ ←. د ∨ ¬د جـ ← ص ص	ك ∨ جـ ∧ ك ∨¬جـ ∨ ص∧ جـ:↔ جـ: ←.ك ∧ د ∨ك ∧ ¬د ¬(جـ∧ ¬جـ ∨ جـ ↔ جـ) ¬(ك ∨ جـ. ↔ جـ) ¬(جـ ↔ جـ) ك
ص	ص

لقد تم رد الصيغة «جـ←. د V ¬د» في الخانة اليمنى كالعادة بواسطة خطوات التحليل المختلفة. لكننا في المرحلة الموالية، عندما استعملنا الطريقة المختصرة وضعنا «ص» مكان العبارة الظاهرة الصدق «د V ¬د» فحصلنا على «جـ ← ص» التي انحلّت إلى «ص». وأما في الخانة اليسرى للتحليل، فقد تم اختزال العبارة «¬(جـ∧ ¬جـ V جـ ↔ جـ)» بطريقة التحليل الصدقي كالمعتاد؛ ثم استعملنا بعد ذلك الطريقة المختصرة الجديدة، فوضعنا «ك» مكان العبارة ظاهرة التناقض «جـ ∧ ¬جـ»، فتوصّلنا إلى «¬(ك V جـ ↔ جـ)»، والتي حلِّلت بدورها إلى «¬(جـ ↔ جـ)». مستعملين هنا أيضًا الطريقة المختصرة، إذ وضعنا «ص» بدل العبارة الصحيحة بشكل واضح «جـ ↔ جـ»، وبه أتممنا تحليلنا الصدقي.

إن الفصل بين ما هو صحيح بشكل واضح وما هو متناقض، وما ليس كذلك مسألة اعتباطية. فالصيغة «¬(جـ∧¬جـ V جـ ↔ جـ)»، الواردة في الخانة اليسرى من جدول التحليل الصدقي أعلاه، عبارة متناقضة في ذاتها، لذا كان من الممكن أن نضع بدلها مباشرة «ك» لو ظهر أن تناقضها واضح بالقدر الكافي. وكذلك شأن العبارة «جـ← . د V ¬د»، في الخانة اليمنى من جدول التحليل، إذ كان من الممكن تعويضها مباشرة بـ «ص». وبغرض توحيد العملية التعليمية، نستطيع أن نحصر مقولة العبارات «المتناقضة بشكل واضح» في النوعين الآتيين: (أ) العبارات الوصلية من قبيل: «¬جـ∧ ب ∧ جـ ∧ د»، و«ب V جـ .∧ د .∧ ¬(بV جـ)»، إلخ. حيث يكون أحد الموصولين مثبتًا والثاني منفيا في العبارة نفسها. (ب) العبارات التشارطية من قبيل «ب ↔ ¬ب»، أو «¬(جـ∧ د) ↔جـ∧ د». غير أنه ينبغي أن ننتبه إلى «ب ← ¬ب» المتسقة.

كما نستطيع أن نحصر مقولة العبارات الصحيحة بشكل واضح في نوعين: (أ) العبارات الفصلية مثل: «¬جـV ب V جـV د»، و«ب ∧ جـV د

V ⌐(ب∧ جـ)»، إلخ، التي تكون إحدى مفصولاتها مثبتة ومنفية في العبارة نفسها. و(ب) العبارات الشرطية أو التشارطية التي يكون طرفاها متماثلين مثل «جـ ↔ جـ»، «جـ∧ د ↔ جـ∧ د»، «ب V جـ. ←. ب V جـ».

وعليه، لا نطبّق الطريقة المختصرة إلا على مثل هذه الصيغ فقط. فهي وحدها ووحدها فقط تختزل مباشرة، وبطريقة مناسبة، إما إلى «ص» أو إلى «ك».

نستطيع أن نستنتج من صحة عبارة معينة، دون الحاجة إلى بت منفصل، صحة كل عبارة تبنى منها عن طريق الإنابة. ذلك أنه بمقدورنا مثلًا أن نستنتج صحة العبارة «جـ∧دV⌐(جـ∧د)» من صحة العبارة «بV⌐ ب» التي تمّت صياغتها انطلاقًا من «ب V⌐ب» عن طريق إنابة «جـ∧ د» بـ «ب». وهو ما يبينه تعريف الصحة. ذلك أن صحة «ب V ⌐ب» تعني أن «ب V ⌐ب» صيغة صادقة أيًا كانت العبارة التي نضعها مكان «ب»، يلزم عن ذلك، كحالة خاصة، أنّ «جـ∧ د V ⌐(جـ∧ د)» صادقة، أيًا كان ما تمثله العبارة «جـ∧ د»، وبالتالي أيًا كانت العبارات التي يُمكن أن تحل محل «جـ» و«د». تحافظ إنابة الصيغ بالحروف على الصحة. غير أنه ينبغي أن نفهم بشكل جوهري أن «الإنابة بالحرف» يعني توحيد الإنابة بالنسبة إلى كل مواقع الحرف. إذ لا يحق لنا مثلًا أن نستنتج صحة العبارة «جـ∧ د V ⌐ب» أو «جـ∧ د V ⌐(جـ∧ هـ)» من صحة الصيغة «بV ⌐ب». يُسمح بوضع العبارة نفسها أو عبارات مغايرة مكان حروف مختلفة، لكن مع ضرورة وضع العبارة نفسها في مواقع الحرف نفسه دائمًا.

ما دام نفي العبارة المتناقضة يستلزم ببساطة عبارة صحيحة، نستطيع أن نستنتج، أن إنابة العبارات بالأحرف تحافظ على التناقض أيضًا. غير أننا نشير، في المقابل، إلى أننا لا نستطيع الاعتماد على الإنابة للحفاظ على الاتساق. إنّ مجرد الإقرار بأن الصيغة الأعم تحوز بعض الأمثلة الصادقة

(أي ما يعنيه الاتساق) ليس مبررًا لأن نفترض أن الحالة الخاصة ستشارك أيًا من هذه الأمثلة الصادقة. فالعبارة «ب ∨ ب ∧ ج»، مثلًا، عبارة متسقة (كما يثبت ذلك التحليل الصدقي)، لكن إنابة «د ∧ ¬د» بـ «ب» تنتج العبارة المتناقضة الآتية:«د ∧ ¬د∨ د ∧ ¬د ∧ ج». وبالمثل، لا يُمكن أن تعتمد إنابة حرف في عبارة غير صحيحة لإنتاج عبارة غير صحيحة؛ إذ يُمكن أن تُنتِج عبارة صحيحة كما يُمكن أن تُنتِج عبارة غير صحيحة.

تمارين

1. تحقق من صحة العبارت التالية بواسطة التحليل الصدقي، مستعملًا الطريق المختصر الجديد المتعلّق بالعبارات الصحيحة أو المتناقضة بشكل واضح.

ب ← ج .∨. ج ← ب، ب ∨ ج ∧ د ∨. ¬ب . ∧ ¬ج ∨ ¬د،

ب ↔ ج .∨. ب ↔ ¬ج، ب ↔ ج . ∨. ج ↔ د .∨. ب ↔ د.

2. قم بإنابة الصيغة «ب∨ج» بـ «ب» في العبارات الأربع المذكورة. يتعلق الأمر في هذا التمرين أساسًا بضبط النقط للحفاظ على التركيب الخاص بها.
3. «إذا كانت لدينا صيغة متسقة لكنها غير صحيحة، ويمكن أن نحصل عبر سلسلة من الإنابات على صيغة صحيحة لازمة عنها؛ ويمكن أن نحصل على صيغة متناقضة عبرسلسلة أخرى من الإنابات»، هل هذا الافتراض صحيح؟ علِّل إجابتك.
4. هل يُمكن أن نحصل على عبارة صحيحة عندما ننفي عبارة متسقة؟ أو صيغة متسقة؟ أو صيغة متناقضة؟ علِّل إجاباتك الإثباتية؟

7 اللزوم

يكمُن الغرض الأول للمنطق، سواء في تطبيقاته على العلوم، أو على الخطاب اليومي، في تعليل ونقد الاستدلال. يهتم المنطق، في جزء كبير منه، بوضع آليات تبرهن على أن عبارة معطاة «تلزم منطقيًّا»، أم لا، عن عبارة أخرى. فمثلًا تلزم عن العبارة: «لا واحد من الطلبة الجدد الراسبين مؤهل للحصول على جائزة بودوين» منطقيًّا العبارة «لا واحد من الطلبة الجدد الراسبين مؤهل للحصول على جائزة بودوين أو جائزة بيشتيل»؛ وتلزم عن العبارة: «كاسيوس ليس نحيلًا وجائعًا معًا» منطقيًّا العبارة: «كاسيوس ليس جائعًا». الواقع أن المثال الأول، من المثالين السالفين، لا يدخل في نطاق منطق الدوال الصدقية الذي نتناوله في الباب الأول من هذا الكتاب، في حين أن المثال الثاني يُمكن معالجته هنا.

من منظور النظرية المنطقية، يُحلَّل عادة لزوم العبارة «كاسيوس ليس جائعًا» منطقيًّا عن «كاسيوس ليس نحيفًا وجائعًا معًا»، بشكل مناسب، إلى الحالتين التاليتين: (أ) يكون للعبارتين صيغتان منطقيتان خاصة بهما «¬(ب ∧ ج)» و«¬ج»، (إذ تعوض العبارتان «كاسيوس نحيل» و«كاسيوس جائع» المتغيرين «ب» و«ج»)؛ (ب) لا توجد عبارتان، توضع مكان «ب» و«ج» على التوالي، تجعل «¬ج» صادقة و«¬(ب ∧ ج)» كاذبة. يُمكن أن نعبر، من الآن فصاعدًا، عن الحالة (ب) بالصيغة: «¬ج» تلزم عن «¬(ب ∧ ج)». وعمومًا، نقول تلزم صيغة دالة صدقية ما عن صيغة دالة صدقية أخرى، إذا كان من المستحيل أن نؤوّل الأحرف بحيث تكون الصيغة الأولى صادقة والثانية كاذبة.

نستطيع أن نبتّ في لزوم صيغة دالة صدقية عا$_2$ عن صيغة أخرى عا$_1$ من خلال اعتبار عا$_1$ مقدمًا، وعا$_2$ تاليًا لعبارة شرطية، ثم نتحقق من صحة الشرط. وذلك طبقًا للتعريف التالي: تلزم عا$_2$ عن عا$_1$ إذا وفقط إذا لم يوجد أي تأويل يجعل عا$_1$ صادقة وعا$_2$ كاذبة، وبالتالي، إذا وفقط إذا لم يوجد أي تأويل يُبطِل الشرط المادي الذي يكون مقدمه عا$_1$، وتاليه عا$_2$. باختصار شديد، إن اللزوم هو صحة الشرط. ومن ثم لكي نثبت لزوم «¬ج» عن « ¬ (ب٨ ج)» على سبيل المثال، نتحقق من صحة الشرط المقابل كالآتي:

¬ج ← ¬(ب ٨ ج)

ك ← ¬(ب ٨ ص) ص ← ¬(ب ٨ ك)

ص ص

دعونا نعرض الآن مثالًا ينتهي بالسلب. هب أن «ب ٧ ج» لا تستلزم «ب ٨ ج»، فإن الأمر سيكون كالآتي:

ب ٧ ج. ← ب ٨ ج

ص ٧ ج. ← ص ٨ ج

ج

ص ك

بمجرد ما نصل إلى «ك» نتوقف عن التحقق من العبارة لأننا نعلم أن «ب ٧ ج. ←ب ٨ ج» ليست صحيحة، أي أن «ب ٧ ج» لا تستلزم «ب ٨ ج». وهذه النتيجة لا تدلّ على أن «ب ٧ ج. ← ب ٨ ج» لا تصدق بالنسبة إلى تأويلات معينة لـ «ب» و«ج»، كما لا تعني أن «ب ٧ج» و«ب ٨ ج» لا

تصدّقان بشكل متزامن بالنسبة إلى تأويلات معينة لـ«ب» و«جـ ». فعدم اللزوم يعني فقط أن بعض التأويلات التي تجعل «ب V جـ» صادقة تجعل «ب ٨ جـ» كاذبة؛ أو أنّ بعض التأويلات، وهو ما يعني الشيء نفسه، تجعل «ب V جـ. ← ب٨ جـ» كاذبة.

بمجرد ما يمعن المرء النظر بشكل سريع في طرق البتّ في اللزوم والصحة والتناقض نتبين صحة القوانين الأربعة التالية:

(1) تلزم كل عبارة عن نفسها.

(2) إذا لزمت عبارة ما عن أخرى، ولزمت عن الثانية عبارة ثالثة، فإن العبارة الثالثة تلزم عن الأولى.

(3) تلزم عن العبارة المتناقضة كل عبارة أيًّا كانت، وتستلزم بواسطة العبارات المتناقضة فقط.

(4) تستلزم العبارة الصحيحة بواسطة كل العبارات، ولا تلزم عن العبارة الصحيحة إلا مثيلاتها فقط.

يقر الجزء الثاني من (4) أن اللزوم، مثل الإنابة، ينقل الصحة. تفعل ذلك الإنابة، كما رأينا، لأن كل تأويلات الصور الثانية تأويلات للأولى. أما اللزوم فيفعل ذلك لسبب مغاير: لأن كل التأويلات التي تجعل الصورة الأولى صادقة تجعل الثانية صادقة.

هكذا، سيبرز الاستئناس اليسير بحالات اللزوم البسيطة بين عبارات الدوال الصدقية، كما سنرى، سهولة عملية بناء البراهين، كلما ارتقينا إلى مستوى منطقي متقدم كما هو الحال في الفصل 38 وما بعده. لن تكون، في تلك المرحلة، القدرة على الإجابة عن الأسئلة المتعلقة باللزوم التي سبق وضعها كافية، والتي نستطيع أن ننجزها بواسطة التحليل الصدقي السابق، بل علينا أن نتمكن من وضع الأسئلة أيضًا. يجب أن نتمكّن من تصور عبارات تستلزم عبارة معينة، أو تلزم عنها، وتعمل بشكل فعّال كحلقات في سلسلة

الأدلة المقترحة. يُمكن التحقق من مثل هذه الإنتاجات المتخيلة بكيفية آلية عن طريق التحليل الصدقي، إلا أن تصورها ليس نشاطًا آليًا. تتوقف سهولتها على إدراك دلالة العبارات البسيطة بوضوحٍ كافٍ كي نستطيع ذكر، بالنسبة إلى عبارة معينة، متوالية تامة من المتغيرات البسيطة نسبيًا، تلزم عنها أو تستلزمها. هب أن لدينا العبارة: «ب ∨ ج» من اللازم أن يتبادر إلينا توًّا أنها تلزم عن «ب» و«ج» و«ب ∧ ج» و«¬ب ← ج»، وأن «ب ∨ جـ ∨ د» و«¬ب ← ج» تلزم عنها. وهب أن لدينا «ب ← ج»، يجب أن يتبادر إلينا توًّا أنها تلزم عن العبارت التالية، كل واحدة على حدة:

¬ب، جـ جـ∧د، ¬ب∨جـ ¬جـ←¬ب، ب←جـ∧د، ب∨د.←جـ

وأن كل العبارات الآتية:

¬ب∨جـ ¬جـ←¬ب، ب←.جـ∨د، ب←جـ.∨د

تلزم عنها. لا تحتاج الإجابة عن مثل هذه الحدوس دقة عالية، لأننا نستطيع أن نتحقق من كل حدس بعد ذلك بواسطة التحليل الصدقي. ما يهم هو أن تكون وافرة ودقيقة بما فيه الكفاية كي تجنبنا الجهد الضائع.

لا شكَّ أن جرد اللزومات يساعد القدرة على تخيل اللزومات، لكن الفهم هو الأساس. عندما تكون العبارات البسيطة جلية بالنسبة إلينا بما فيه الكفاية، نستطيع أن نرى من خلالها، بواسطة نور العقل الخالص، عبارات أخرى ينبغي أن تكون صادقة إذا صدقت تلك أيضًا، أو لا يُمكنها أن تصدق إلا إذا صدقت تلك أيضًا. يجدر بنا أن نتأمل في الأمثلة السابقة والتالية إلى أن يبدو بديهيًا، من خلال دلالات الرموز وحدها، أن اللزومات يجب أن تكون صحيحة.

وما يساعد على معالجة اللزومات، بلا شك، هو بساطة التحقق. وَفقًا لما سلف، دعونا نفسر عملية اختبار سريع يسمى **الفحص الانتقائي** الذي يصلح، وإن لم يكن عامًا، لعدد لا يستهان به من الحالات البسيطة.

تكون بعض العبارات قابلة للتحقق بشكل ملحوظ بواسطة تأويل واحد وواحد فقط لأحرفها. إذ تصدق «ب ٨ ⌐ج» إذا وفقط إذا وضعت «ص» مكان «ب» و«ك» مكان «ج». وعليه، عندما تكون عا عبارة من هذا القبيل، فإن التساؤل عما إذا كانت العبارة عا تستلزم عا′ يُمكن أن نبتّ فيها بتعويض «ب» و«ج»، إلخ. في عا′ بالقيم الصدقية التي تجعل عا صادقة، ثم نجري التحليل. فإذا حصلنا على «ص» أو على عبارة صحيحة، فإن عا تستلزم عا′؛ وإلا فالعكس. لكي نثبت مثلًا أن «ب ٨ ⌐ ج» تلزم عنها «ب ← جـ . ← د»، نضع «ص» مكان «ب» و«ك» مكان «ج» في العبارة «ب ← جـ . ←د»؛ وبعد تحليل النتيجة «ص ← ك . ←د» نحصل على «ص».

يُمكننا الفحص الانتقائي من وضع كل المسائل الخاصة باللزوم الذي يتعلق بـ «ب» أو «⌐ب». فلإثبات أن «جـ ← ب» تستلزم «ب»، نضع «ص» مكان «ب» في العبارة «جـ ← ب» ونحلل النتيجة «جـ ← ص» فنحصل على «ص». ولإثبات أن «ب» تلزم عن «ب ← جـ . ← ج» نضع «ص» موضع «ب» في العبارة «ب ← جـ . ← ج» ونحلل النتيجة «ص ← جـ ← ج» فنبلغ العبارة الصحيحة «جـ ← ج». ولإثبات أن«⌐ج» تلزم عن «⌐ (ب ٨ ج)»، وهو نفس مثال «كاسيوس ليس نحيلًا وجائعًا معا»، إذ كان بإمكاننا أن نستبدل «ص» بـ «ج» في العبارة «⌐(ب ٨ ج)»، ثم نحلل النتيجة «⌐(ب ٨ ك)» فنحصل على «ص».

في المقابل نجد بعض العبارات قابلة للإبطال بفضل تأويل واحد وواحد فقط لأحرفها من قبيل «⌐(ب ٨ د)» التي تكذب إذا وفقط إذا استبدلنا «ص» بـ «ب» و«د»؛ وتكذب«ب← د» إذا وفقط إذا استبدلنا «ص» بـ «ب» و«ك» بـ «د»؛ وتكذب «ب ٧ د» إذا وفقط إذا استبدلنا «ك» بـ «ب» و«د»؛ وتكذب «ب ٨ د ← هـ» إذا وفقط إذا استبدلنا «ص» بـ «ب» و«د» و«ك» بـ «هـ»؛ وتكذب «ب ←. د ٧هـ» إذا وفقط إذا استبدلنا «ص» بـ «ب» و«ك»

بـ «د» و«هـ». وإذا كانت عا' عبارة يُمكن إبطالها بواسطة تأويل واحد وواحد فقط، فيمكن البتّ ببساطة في ما إذا كانت العبارة عا تستلزم عا' بتعويض «ب» و«جـ»، إلخ. في عا بالقيم التي تؤدي إلى كذب عا'، ثم نجري التحليل. فإذا حصلنا على «ك» أو على عبارة متناقضة، فإن عا تستلزم عا' وإلا فإن العكس صحيح . وذلك لأن اللزوم لا يفسد إلا إذا صدقت عا وكذبت عا'.

ولنثبت مثلاً أن «ب←جـ .٨ جـ ←د» تستلزم «ب ← د» نستبدل «ص» بـ «ب» و«ك» بـ «د» في العبارة «ب←جـ .٨ جـ ←د»، ثم نحلل النتيجة «ص← جـ . ٨جـ ←ك» فنحصل على العبارة المتناقضة التالية: «جـ٨ ¬جـ». ولنثبت لزوم العبارة «ب ٧ جـ» عن «ب ٧ جـ .٨ جـ ←د» نستبدل «ك» بـ«ب» و«د» في العبارة «ب ٧ جـ .٨جـ ←د» ونحلل لنصل إلى «جـ ٨ ¬جـ» من جديد. ولإثبات أن العبارة «ب ←جـ ٨جـ٨د ←هـ» تستلزم «ب٨ د ←هـ» نستبدل «ص» بـ«ب» و«د»، و«ك» بـ «هـ» في العبارة «ب←جـ ٨جـ٨ د ← هـ» ثم نجري التحليل.

تمثل طريقة الفحص الانتقائي النازل منهجًا مناسبًا من بين أخرى حينما نود أن نعرف إن كانت العبارة عا تستلزم «ب»، أو «¬ب». ولإثبات أن «ب ٨ جـ ٧ ب ٨ ¬جـ» تستلزم «ب» نستبدل «ك» بـ «ب» في العبارة «ب ٨ جـ ٧ ب ٨ ¬جـ» ثم نحلل النتيجة «ك ٨ جـ ٧ ك ٨ ¬جـ» فنحصل على «ك». ولإثبات أن العبارة «ب ٧ جـ٨ ب ٧ ¬جـ» تستلزم «ب» نستبدل «ك» بـ «ب» في العبارة «ب ٧ جـ٨ ب ٧ ¬جـ» ثم نحلل النتيجة «ك ٧ جـ٨ ك ٧ ¬جـ» فنحصل على العبارة المتناقضة الآتية: «جـ٨ ¬جـ».

لا تكون الفحوصات الانتقائية ممكنة إلا عندما تكون العبارة اللزومية صادقة بوضوح بالنسبة إلى تأويل واحد وواحد فقط، أو عندما تكون العبارة اللازمة أيضًا كاذبة بالنسبة إلى تأويل واحد وواحد فقط. إن الاختبار العام للزوم، الذي يقبل التطبيق على جميع الحالات، هو التحليل الصدقي للشرط: يقابل الفحص الشامل الفحص الانتقائي.

يمكن للزوم أن يربط بين العبارات وبين الصور أيضًا، وعندما تلزم صورة عن أخرى، أو عندما نحصل على زوج من العبارات انطلاقًا من هذه الصورة بواسطة التأويل، نستطيع القول عبر التوسيع إنَّ الصورة الأولى تستلزم الثانية. وهكذا، فبجانب قولنا إن «¬ج» تستلزم «¬(ب ٨ ج)» يُمكن أن نقوم بتأويلات فنقول «كاسيوس ليس جائعًا» تستلزم «كاسيوس ليس نحيلًا وجائعًا معًا». لكن من الأفضل أن نقر صراحة هنا أن العبارة الأولى تستلزم الثانية صدقيًا، فإضافة الحال ينبغي أن يذكرنا بأن الصورة التي أدخلت العبارتين في علاقة لزوم هي الصور الصدقية وليس الصور من النوع الذي سننظر فيها في الباب الثاني وما بعده. بعبارة أخرى، إن لزوم الدالة الصدقية هو العلاقة التي تقيمها عبارة ما مع عبارة أخرى عندما تُشتق الثانية من الأولى وفق اعتبارات منطقية داخل إطار منطق الدوال الصدقية. ويمكن أن يطبق التعبيرين «صحيحة صدقيًا» و«متناقضة صدقيًا» بالكيفية نفسها على العبارات.

إن اللزوم مرتبط، كما رأينا، بشكل وثيق بالشرط. ولا يصح اللزوم إلا إذا وفقط إذا كان الشرط صحيحا. وقد تولد عن هذه العلاقة الهامة ميل بعض المناطقة إلى اعتبار «يلزم»، بكيفية ملتبسة، قراءة لرمز الشرط «←». وحيث سبق أن بيّنا أن العبارة الشرطية «ب ← ج» تصدق متى كانت «ب» كاذبة أو «ج» صادقة، وجب أن نستنتج، مع نوع من المفارقة، أن كلّ كذب يلزم عنه كل عبارة أيًا كانت، وأن الصدق يلزم عن كل عبارة أيًا كانت. إننا لا ندرك أن الرمز «←» يفيد تقريبًا التعبير « إذا...ف» وليس «يلزم».

ولكي ندرك تمامًا الفرق الذي وضعته بين «←» أو « إذا...ف» و«يلزم»، يجب أن نعي بوضوح الفرق بين الاستعمال والتلفظ، فعندما نقول إن كامبريدج تجاور بوسطون، فإننا نتلفظ بكامبريدج وبوسطون، لكننا

نستعمل اسمي «كامبريدج» و«بوسطون»؛ دون أن نكتب فعل «تجاور» بين كامبريدج وبوسطون، بل بين اسميهما. عندما تكون المواضيع المُتَلَفَّظة مُدُنا، كما هو الحال هنا، من المستبعد الخلط بين الاستعمال والتلفظ. بيد أن التمييز نفسه يسري عندما تكون المواضيع المذكورة تعابير لغوية. فعندما نكتب:

تتساجع كلمتا «الغراب» والحجاب.

وعندما نتلفظ بالكلمتين «نعسان» و«فرحان»، نستعمل اسمي هذين اللفظين، ولا نكتب «تساجع» بين اللفظتين المتجانستين، بل بين اسميهما. ويمكن أن نكتب أيضًا:

«نعسان» تساجع «فرحان».

لكننا نستعمل، هنا أيضًا، اسمي اللفظين المتجانسين المعنيين -تشكل الأسماء في هذه الحالة بإضافة المزدوجتين- لذا لن يكون خطأ، بل خرق لقواعد النحو وخلوٌ من الدلالة أن نكتب:

نعسان تساجع فرحان

عندما نقول إن عبارة أو صورة تلزم عنها عبارة أو صورة أخرى، يجب ألّا نكتب فعل «يلزم» بين العبارات أو الصور المعنية، بل بين أسمائها. وبهذه الطريقة، نتلفظ بصور أو العبارات، ونتحدث عنها، لكننا نستعمل أسماءها. وتصاغ هذه الأخيرة عادة بإضافة المزدوجتين[1]. وبذلك تكون الصحة والاتساق من هذه الناحية على قدم المساواة مع اللزوم: لا نقول عن عبارة أو صورة ما صحيحة أو متسقة بإضافة «صحيحة» أو «متسقة» إلى العبارة أو الصورة المعنيتين، بل إلى اسميها.

في حين، عندما نركّب عبارة أو صورة من أخرى بواسطة «إذا... فـ» أو

(1) عندما يمتد اللفظ الذي نود تسميته إلى سطر معزول أو أكثر، أستبدل نقطتي التفسير بالمزدوجتين. انظر أعلاه.

«→»، فإننا نستعمل القضايا أو العبارات نفسها لا أسماءها. وفي هذه الحالة لا نتلفظ بالعبارات أو الصور. لا وجود لأية إحالة عليهما؛ إذ يردان باعتبارهما أجزاء من عبارة أو صورة أطول. إن العبارة الشرطية:

إذا لم يكن كاسيوس جائعًا فإنه ليس نحيلًا وجائعًا.

تذكر كاسيوس وتقول عنه شيئًا مبتذلًا للغاية، لكنها لا تذكر أي عبارة بالمرة. إن الوضع هنا مماثل للوصل والفصل والنفي.

لقد وضعنا قاعدة لمعالجة «إذا...ف» صدقيًا. ولم نخصص حقًّا أي مجال، ضمن مواضيع تحليلنا المنطقي، لأساليب الدوال غير الصدقية في تركيب العبارات. بيد أن الواقع هو أن اللزوم، باعتباره علاقة بين العبارات، يقيم علاقات بنيوية وثيقة؛ فهو يشمل أمورًا أكثر من القيم الصدقية لعبارتين فقط. ولا يتعارض هذا الأمر، بأي وجه من الأوجه، مع الالتزام الصارم بأساليب الدوال الصدقية في تركيب العبارات والصور، ما دام علينا أن نركب هذه العبارات أو الصور. تتساوى الأفعال «يلزم» و«أطول من»، و«أوضح من»، و«تجانس» كلما تعلق الأمر بالتعارض المعني: فهي لا تربط بين العبارات لتكوين عبارات مركبة، بل تربط بين أسماء العبارات لتكوين عبارات حول العبارات.

لمحة تاريخية: تم إهمال التمييز الذي عرضناه توًّا من قبل وايتهيد وراسل اللذين يسندان بلا تمييز إلى العبارة «ب → ج» القراءتين: «إذا ب فإن ج» و«ب تسلزم ج». لقد اشتد السجال القديم، نتيجة لذلك، حول الشرط المادي (الفصل الثالث). يعترض على الدالة الصدقية «¬(ب∧¬ج)» بكونها تدلّ على «إذا-ف»؛ بل تلاقي المزيد من الاعتراض عليها وتحديدًا من جراء اعتبارها دالة على «يلزم». من المؤكد أنه ينبغي أن نحتفظ باللزوم كعلاقة قوية تتوقف على بنية العبارت التي تربط في ما بينها وليس على القيم الصدقية فقط.

لا تزال عادة نطق الرمز «←» بـ «يلزم» سائدة، وينبغي نبذها. وما يشجّع عليها جزئيًا هو الابتذال الحاصل في كون «إذا» تغير ترتيب الكلمات بينما تقع «يلزم» في مكان «←». وكل من يُمعِن النظر في هذا الأمر يجد أنه يُمكننا أن نقرأ «←» دون تغيير موضعها كما في «فقط إذا»؛ انظر الفصل الموالي. ⎣

تمارين

1. حدد بواسطة التحليل الصدقي إن كانت «ب ·↔ جـ↔ د» تلزم عنها «د ↔. جـ ← ب» أو العكس بالعكس.
2. قم بالشيء نفسه بالنسبة إلى العبارتين التاليتين:

   ب↔جـ∧ د .← ب ∧ جـ؛

   ب ← جـ ∧ د .↔ ب ∧ جـ
3. حدد أي العبارات الأربعة التالية:

   ب . ∧ب ← جـ   ⌐جـ.∧ ب ← جـ

   ب .∧ ⌐ب ← جـ   ب ← جـ∧ ⌐جـ

تلزم عنها «جـ»، وأيها تلزم عنها «⌐ب». وهذا يعني وجود ثمانية فحوص انتقائية ضرورية.

4. حدد أي لزوم يوجد بين هذه العبارات:

   ب ← جـ   ب V جـ.← د،   ب ←. جـ V د.

علما أن «ب ← . جـV د»، شأنها شأن «ب ← جـ» لا تكذب إلا في تأويل واحد لأحرفها.

5. حدد أي لزوم يوجد بين العبارات الآتية:

   ب ∧ ⌐جـ   ⌐ب ↔جـ   ب V جـ
6. أوجد أكبر عدد ممكن من العبارات التي تتضمن ورودًا واحدًا لكلٍّ من

«ب» و«ج»، وحدهما فقط، بحيث يلزم عن كل عبارة «~ب». ثم أوجِد أكبر عدد ممكن من العبارات التي تلزم عن «~ب».

7. حدد أي هاتين العبارتين تستلزم الأخرى:

- إن الشركة مسؤولة إذا وفقط إذا كانت وحدة لإنتاج البلاستيك، وأُنشِئَت منذ شهر يناير.
- إذا كانت وحدة لإنتاج البلاستيك، فقد أُنشِئَت منذ شهر يناير والشركة مسؤولة؛ وإذا لم تكن وحدة لإنتاج البلاستيك، فإنها لم تنشأ منذ شهر يناير والشركة غير مسؤولة.

الطريقة: اكتب العبارات التي تمثل الصور المنطقية لهاتين العبارتين مستعملًا «ب» و«ج» و«د» بالنسبة إلى العبارتين المكوِّنتين؛ ثم قم باختبار لزوم العبارات. تأكد من عدم استعمالك «ب» إلا بالنسبة إلى مكوّن واحد نفسه ضمن العبارتين معًا، والشيء نفسه بالنسبة إلى «ج» و«د». وتأكد من الحفاظ على التراكيب السليمة أيضًا.

8 من الكلمات إلى الرموز

ينطلق الاستدلال المنطقي من المقدمات –أي عبارات تكون إما مسلَّمات أو تقبل لسبب من الأسباب- إلى نتائج يُمكن أن نبرهن على صدقها، متى كانت المقدمات صادقة، بواسطة قواعد منطقية خالصة. وتعد التقنيات المطلوبة لهذه الغاية من المهمات الأساسية للمنطق، وقد بدأت تستأثر باهتمامنا من قبل. بيد أنه في الوقت الذي يتأسس الاقتران بين المقدمات والنتائج بشكل منطقي، لا تكون المقدمات والنتائج عادة كذلك؛ وهنا يكمُن بالضبط تطبيق المنطق في مجالات أخرى غير ذاته.

يمكن أن تتناول المقدمات والنتائج أي صنف من الموضوعات وتُصاغ في البداية باللغة العادية بدل تقنيات الترميز المنطقي الحديث. إننا نعمد إلى تشويه وتحريف العبارات لنساعد على وضع اللزومات، أولًا بإدخال أحرف رمزية من أجل استخراج البنيات الدلالية المهمة، ثم نترجم مختلف الكلمات إلى عدد قليل من الرموز من قبيل «→» و« v»، قصد الحصول على عناصر بنيوية قابلة للمعالجة المختصرة. إن هذه المهمة التي تكمُن إجراء تشارح مناسب لعبارة ما، وعزل بنيتها الدلالية، في إجراء رئيس بالنسبة إلى المنطق بالقدر الذي يكوِّنه البتّ أو برهان اللزوم الذي تعبِّد له الطريق هذه المهمة الأولية.

لقد تمّت الإشارة من قبل، عند الحديث عن ترميز النفي (انظر الفصل الأول)، إلى مثال عن كيفية اختزال تشارح التعابير المختلفة إلى أسلوب واحد. كما أن ترميز الوصل له أثر مماثل، لأن الوصل لا يعبر عنه في

اللغة الطبيعية بـ «و» فقط، بل بـ «لكن» و«مع أن»، بالإضافة إلى علامات الوقف غير المنطوقة[1] وغيرها من الأساليب المتنوعة. إن التمعُّن في «لكن» و«مع أن» مفيد، لأنه سيبرز لنا الفرق بين ما يُمكن أن نسميه الخصائص المنطقية والبلاغية للغة. ونحن نميل إلى القول:

جونز هنا لكن سميث في الخارج

بدل القول:

جونز هنا وسميث في الخارج

مناط ذلك التضاد بين الوجود هنا والوجود في الخارج؛ أو إذا كان التضاد بين «جونز هنا» و«سميث في الخارج» بلغ درجة من التناسب بحيث يحدث مفاجأة، كما هو الحال، مثلًا، إذا لم يكن جونز معتادًا على الحضور إلا لرؤية سميث، فإننا سنميل إلى القول:

جونز هنا مع أن سميث في الخارج

بَيْد أنّ الظروف التي تجعل العبارات المركبة صادقة تظل دائمًا هي نفسها، أي ربط الصدق المتزامن للمكونين، بغض النظر عن استعمالنا لـ «و»، أو «لكن»، أو «مع أن». إنّ استعمال كلمة من هذه الكلمات بدل الأخرى قد يحدث فارقًا في طبيعة العبارة، كما يُمكن أن يزودنا بمؤشر اتفاقي على ما يجول في ذهن المتكلم، لكنه يظلّ عاجزًا عن أن يميز بين صدق أو كذب المكوِّن. إن الفرق الدلالي بين «و»، و«لكن» و«مع أن»، فرق بلاغي وليس منطقيًّا. وحيث لا يُعنى الترميز المنطقي بالفروقات البلاغية، فإنه يعبر عن الوصل بطريقة موحدة.

ولكي نضرب مثلًا آخر عن اختزال التعابير المتنوعة من اللغة الطبيعية إلى الترميز المنطقي الموحَّد، لننظر في التعابير الشائعة لـ «إذا...فـ»:

(1) رغم أن بعض هذه المواد المعجمية لا تعتبر حروف عطف في النحو العربي، بل أدوات ربط، إلا أن وظيفتها هي العطف: علاوة على أن علامات الوقف مثل الفاصلة لا تعتبر في اللغة العربية وصلًا عكس اللغات اللاتينية والأنغلوساكسونية. [المترجم]

إذا ب فإن جـ: ب فقط إذا جـ: جـ إذا ب : جـ إلا إذا ب: جـ إذا صدقت ب.

إذا قبلنا بالترميز «ب ← جـ»، كتعبير على الأقل عن صيغة «إذا ب فإن جـ»، فإنه سيشكل في الوقت نفسه تعبيرًا عن كل تلك التعابير الأخرى.

نشير إلى أن مقدم الشرط، المطابق لـ«ب» في «ب ← جـ» لا يكون دائمًا هو الجزء الذي يأتي في بداية التعبير اللغوي. يتعلّق الأمر بالأحرى بالجزء الذي تتحكم فيه «إذا» (أو «إذا صدقت»، و«إلا إذا»، إلخ)، بغض النظر عن وجودها في بداية أو آخر الشرط. وهكذا نقبل أن ننقل «ب إذا جـ» إلى «جـ ← ب» وليس إلى «ب ← جـ». فإذا كانت أداة الشرط «إذا» تدلّ عادة على المقدم، فإن ملحقها «فقط» يولد نتيجة معاكسة. فالتعبير «فقط...إذا» علامة على التّالي. وعليه لا تدلّ «ب فقط إذا جـ» على «ب إذا جـ»، بل «إذا ب فإن جـ»، ولا تدلّ على «جـ ← ب»، بل على «ب ← جـ». مثلًا، «ستحصل على شهادتك فقط إذا كنت قد أدّيتَ مستحقات التسجيل»، لا تعني «إذا كنت قد أديتَ مستحقات التسجيل ستحصل على شهادتك»، بل تعني «إذا حصلتَ على شهادتك، فإن مستحقات تسجيلك ستكون قد سُدِّدت».

قد يجد القارئ أنَّ «إذا ب فإن جـ» طريقة غير سليمة للتعبير عن «ب ← جـ»، بسبب الفصل بين «إذا» و«فإن». إذا كان الأمر كذلك، فإن الملاحظة السالفة بخصوص «فقط إذا» تستحق عناية خاصة: إذ يُمكن أن نقرأ «←»: «فقط إذا».

تجدر الإشارة خصوصًا إلى أن «فقط إذا» ليس لها معنى «↔»، التي هي «إذا وفقط إذا». وكما تُبيّن الكلمات، إن «ب إذا وفقط إذا جـ» عبارة عن وصل بين «ب إذا جـ» و«ب فقط إذا جـ»، وبالتالي بين «جـ ← ب» و«ب ← جـ».

يمكن أن نضيف إلى الصياغات اللغوية لـ«إذا ب فإن جـ» المذكورة سابقًا صيغة أخرى: «لا ب إلا إذا جـ». يقودنا هذا التعبير إلى الاحتمالات الغريبة

الآتية: إذا كانت «لا ب إلا إذا ج» تعني «ب ← ج»، وكانت «ب ← ج» تعني «¬ب V ج»، فإن «لا ب إلا إذا ج» يجب أن تعني «¬ب V جـ »، وهو ما يجعل «إلا إذا» تطابق «V» وبالتالي «أو». أيًا كانت الغرابة في المساواة بين «إلّا إذا» و«أو» فإنها الغرابة نفسها التي تخص المساواة بين « إذا...فإن» و«←». قد نشعر أحيانًا أن التعبير «إذا...فإن» تنم عن ترابط سببي، أو شيء ما مماثل؛ وفي الحدود التي يقوم فيها بذلك، يسري الشيء نفسه على «إلا إذا». غير أننا عندما نستنتج دالة صدقية من « إذا...فإن» نحصل على «←»، وعندما نستخلص دالة صدقية من «إلا إذا » نحصل على «V»، «أو».

إذا كانت خاصية تبديل الفصل «أو» بديهية، أي التكافؤ بين «ب V ج»، و«جـ Vب»، فإن ذلك أقل بداهة بالنسبة إلى «إلا إذا». يبدو أن العبارتين:

(1) سيبيع جونز إلا إذا تلقّى منك مكالمة

(2) سيتلقّى جونز منك مكالمة إلا إذا باع

مختلفتان دلاليًا. ومع ذلك، يُمكن أن نرجع هذا التباين في جزء منه إلى ميل «إلا إذا» بشكل واضح إلى ذكر الواقعة الأولى في الأخير عندما تكون العلاقات الزمنية مهمة. وبسبب هذا الميل، ننحو إلى فهم العبارة المبهمة «تلقّى منك مكالمة» في العبارة (1) باعتبارها تعني: «تلقى منك مكالمة تفيد أن عليه ألّا يبيع»، وأنها تعني في العبارة (2) «تلقّى منك مكالمة تفيد أنه كان عليه أن يبيع». لكن، إذا كان علينا أن نقارن بين (1) و(2)، باعتبارهما مكونات لعبارات حقيقية، علينا أن نعطي أولًا، لكل مكوِّن خاصية خالية من الالتباس ودلالة ثابتة، إن لم تكن مطلقة، فعلى الأقل بما يكفي لإزالة تغير الدلالة خلال المقارنة. وعليه قد يكون علينا أن نصحح العبارتين (1) و(2) فنقرأهما كالتالي:

سيبيع جونز إلا إذا أوقفْته

سيُوبَّخ جونز من قبلك إلا إذا لم يبع

وبذلك نعتبرهما مترابطتين ليس على شاكلة «ب إلا إذا ج» و«ج إلا ذا ب»، بل على شاكلة العلاقة «ب إلا إذا ج» و«د إلا إذا ب».

هكذا نكون، إلى حد الآن، قد فحصنا بسرعة خاصية التشارح الذي يتعلق بمفردات اللغة فقط. فقد سعينا إلى المطابقة بين روابط اللغة العادية ورموز روابط المنطق الرمزي. يلقي المثال الأخير، مع ذلك، الضوء على مظهر دقيق آخر لوظيفة التشارح: علينا في بعض الأحيان ألّا نترجم الروابط فحسب، بل أن نعيد صياغة الجمل المكوِّنة نفسها، إلى درجة حمايتها بأي طريقة من التغيرات المادية للدلالة في حدود الدليل المعني. ويمكن أن نرى ضرورة هذه العملية ببساطة أكثر وبشكل مباشر في المثال الموالي. قد تكون العبارتان الوصليتان:

(3) ذهب إلى باوكاتوك وكذلك فعلت

(4) ذهب إلى ساوغاتوك لكنني لم أفعل

صادقتين معًا؛ ومع ذلك لو مثلناهما بالصيغتين: «ب ٨ ج» و«د ٨ ¬ج»، اللتين تبدوان ملائمتين للوهلة الأولى، فسنحصل على عبارة متناقضة «ب ٨ ج ٨ د ٨ ¬ج». الحقيقة أنه يجب أن نميز التعبير «كذلك فعلت» في العبارة (3) عن «كذلك فعلت» الذي دخل عليه النفي في العبارة (4)؛ فالأولى هي «ذهبت إلى باوكاتوك» والثانية «ذهبت إلى ساوغاتوك». فعندما نكمل (3) و(4) بهذه الكيفية لن يكون بمقدورنا أن نرمز إليهما على شاكلة «ب ٨ ج» و«د ٨ ¬ج»، بل على شاكلة «ب ٨ج» و«د ٨ ¬ه»، وبذلك يختفي التناقض الظاهر. عمومًا تتوقف دقة التحليل والتدليل المنطقيين على عدم إسنادنا إلى العبارة نفسها تأويلات مختلفة أثناء عملية الاستدلال. وقد عُرِف خرق هذا المبدأ في المنطق التقليدي بمغالطة الالتباس.

بقدر ما يتوقف تأويل العبارات الملتبسة على السياق العام للدليل- المتكلم والمستمع والوضع والزمن والمشكل والغرض المعنيين- يجب ألّا

نتخوّف من مغالطة الالتباس: والسبب هو أننا نستطيع أن نتوقع تأثير خلفية الظروف في تأويل العبارة الملتبسة بشكل موحَّد كلما عاودت الظهور هذه العبارة في الدليل. لذا تكون الألفاظ ذات الإحالة الملتبسة نحو «أنا» و«أنت/أنتم (أنتن)» و«هنا» و«جونز» و«شارع إلْم» مقبولة عادة في الأدلة المنطقية دون قيد، ولا يمسّ تأويلها الصحة المنطقية للدليل، شريطة أن تظل هي نفسها على طول هذا الدليل.

تبرز مغالطة الالتباس خصوصًا عندما تؤثر السياقات المباشرة في تأويل التعابير الملتبسة بطرق مختلفة، كما هو الحال بالنسبة إلى العبارتين (3) و(4)، حيث تخضع العبارة لتغيرات المعنى في حدود الدليل. نضطر، في مثل هذه الحالات، إلى إعادة الصياغة، قبل الذهاب بعيدًا، ليس إلى حد حذف كل التباس، بل حذف هذا الجزء من الالتباس الذي يُمكن، إذا تركناه على حاله، أن يختفي في النهاية بطرق مختلفة بواسطة السياقات المباشرة المختلفة ضمن الدليل المنطقي الموضوع. يجب أن نعتبر الروابط المنطقية التي تقرن المكونات في العبارات المركبة وسائل لعزل كل مكون عن كل تأثير يُمكن أن تمارسه العوامل المجاورة على دلالته: يجب أن يكون كل مكوّن مستقلًا تمامًا، ما عدا إذا كان معناه يتوقف على ظروف أوسع تشرط معاني الألفاظ إمّا في العبارة ككل وإمّا في الدليل المنطقي ككل.

غالبًا ما يصير واضحًا، عندما يحضر هذا التنبيه في الذهن، أن العبارة المركبة التي تبدو للوهلة الأولى قابلة للتحليل إلى حدود الوصل والنفي فحسب تتطلب أدوات منطقية من طبيعة متطورة. فالعبارة:

(5) رأينا بركان سترومبولي وهو ينفث الحمم

لا تقبل أن تُحلَّل بشكل مناسب إلى عبارة وصلية بسيطة، لأن الصيغة «... وهو ينفث» تتضمن إحالة زمنية أساسية ترجع المكوِّن الثاني إلى المكوّن الأول. هناك تحليل أكثر مطابقة يؤول (5) على نحو الآتي:

كانت لحظة معينة من مشاهدتنا لبركان سترومبولي، هي لحظة نفثه الحمم،

حيث تتدخل بِنى منطقية يتناولها الباب الثاني،

تحوز العملية العامة لتشارح العبارات بغرض عزل بناها المنطقية مظهرين كما رأيناه: الترجمة المباشرة للألفاظ المناسبة إلى رموز منطقية (تختزل في هذا المستوى من المنطق إلى دوال صدقية للرموز)، ثم إعادة صياغة الجملة البسيطة من أجل تجنب مغالطة الالتباس. بَيْدَ أنَّ مظهرًا ثالثًا، يساوي سابقيه في الأهمية، ويبرز عندما تكون أمثلتنا مركبة بقدر كبير، يكمُن في تحديد كيفية تنظيم المقاطع المتشارحة بشكل مناسب في كل مبَنْيَن. نواجه هنا مشكلة تحديد التركيب المطلوب. لقد أشرنا إلى بعض القرائن المتعلقة بتركيب العبارات في اللغة العادية (الفصل الرابع)، غير أنه يجب، بشكل عام، أن نعتمد على حدسنا بالتعابير اليومية من أجل فهم مباشر للعبارة، ثم نعيد التفكير في الكل بإعمال الرموز المنطقية. عندما تكون عبارة ما مركبة، فمن الأفضل البحث أولًا عن البنية الخارجية، ثم القيام بتشارح باتجاه الداخل، خطوة تلو الأخرى. يحوز هذا الإجراء ميزتين تكمُن الأولى في تقسيم المسألة إلى أجزاء تقبل المعالجة، والثانية في القدرة على التحكم في الصعوبات الخاصة بالتجميع. هب أن لدينا، على سبيل المثال، العبارة الآتية:

(6) إذا كان جونز مريضًا أو سميث بالخارج فلن تبرم الصفقة مع الشركة، ولن يجتمع المديرون ويعلنوا عن إيرادات الأسهم إلا إذا عاد روبنسون إلى رشده وأمسك بزمام الأمور.

نبحث، في البداية، عن الرابط الأسامي في العبارة (6). فإذا استدللنا،كما فعلنا في الفصل الرابع، نستطيع أن نقلّص من اختيارنا لنقتصر على «إذا... فإن» و«إلا إذا»؛ ولنفرض أن اختيارنا استقر على «إذا...فإن». عندئذ

ستكون البنية الخارجية للعبارة (6)، في هذه الحالة، هي بنية الشرط. ولنفرض فقط أن هذه البنية المطابقة بكيفية صريحة على العبارة (6)، مؤجلين كل تحليل مفصل. سنحصل حينئذ على:

(7) جونز مريض أو سميث بالخارج ← لن تبرم الصفقة مع الشركة، ولن يجتمع المديرون ويعلنوا عن إيرادات الأسهم إلا إذا عاد روبنسون إلى رشده وأمسك بزمام الأمور.

بعد ذلك، يُمكن أن نعتبر، كما لو كان الأمر يتعلق بمسألة منفصلة عن (7)، المكوِّن «لن تبرم...الأمور» فقط. هب أننا قررنا اعتبار رابطها الأساسي هو «إلا إذا». فإذا اعتبرنا «إلا إذا» رابطًا للفصل «v»، سنحول العبارة (7) برمّتها إلى:

(8) جونز مريض أو سميث بالخارج ← لن تبرم الصفقة مع الشركة، ولن يجتمع المديرون ويعلنوا عن إيرادات الأسهم v عاد روبنسون إلى رشده وأمسك بزمام الأمور.

أما الآن، فلنتناول أطول مكوِّن لم يحلل بعد، كما لو كان الأمر يتعلق بمسألة منفصلة عن (8)، أعني «لن تبرم...الأسهم». إن الرابط الأساسيّ هنا بشكل واضح «لن...ولن». وعندما يظهر إذًا أن « لا د ولا هـ» تترجم رمزيًّا إلى «¬د ∧ ¬هـ»، سنعيد كتابة المكون «لن تبرم...الأسهم» وفق ذلك: فتصير (8) على هذا الشكل:

(9) جونز مريض أو سميث بالخارج ←. ¬(تبرم الصفقة مع الشركة) ∧ ¬(يجتمع المديرون ويعلنون عن إيرادات الأسهم) vعاد روبنسون إلى رشده وأمسك بزمام الأمور.

بعد أن وجّهنا اهتمامنا، أخيرًا، إلى المكونات القصيرة المختلفة التي بقيت غير محللة في العبارة (9)، نعيد الآن تحويل العبارة بأكملها إلى الصيغة الآتية:

(10) جونز مريض ∨ سميث بالخارج . ←: ¬(تبرم الصفقة مع الشركة) ∧ ¬(يجتمع المديرون ∧. يعلن المديرون عن إيرادات الأسهم) ∨. عاد روبنسون إلى رشده ∧. أمسك روبنسون بزمام الأمور.

وعليه ستكون البنية الكلية للعبارة رمزيًا، كالآتي:

(11) ب ∨ جـ .←. ¬د ∧ ¬(ع ∧ غ) ∨ ف ∧ ق

تمارين

1. علِّل انطلاقًا من العبارة (6) الاستدلال على النتيجة التالية:

إذا كان جونز بالخارج ولم يعد روبنسون إلى رشده فلن تبرم الصفقة مع الشركة.

الطريقة: أوجِد الصيغة التي تطابق هذه النتيجة كما هو حال (11) المطابقة لـ (6)، ثم بَيِّنْ أنَّ هذه الصيغة تلزم عن (11).

2. عيِّن علاقات اللزوم بين العبارات التالية:

لن يكون جونز مؤهلًا إلا إذا استقال من مهمته أو وقَّع وثيقة تنازل.

يكون جونز مؤهلًا إذا كان قد استقال من مهمته أو وقَّع وثيقة تنازل.

يكون جونز مؤهلًا فقط إذا وقع وثيقة تنازل.

الطريقة: ضع تشارحًا للعبارات، وصغها في بنيات صورية، ثم تحقق من التلازمات بين الصيغ. أبرز كل الخطوات.

3. ضع تشارحًا من الخارج نحو الداخل مبرهنًا ومبيِّنًا كل خطوة:

إذا كان إما أن يفوز العمالقة أو برانز، ويحتل جاكالز المركز الثاني، فإنني متأكد أنني سأعوض خساراتي الماضية أو أشتري بيانو أو سأسافر إلى باربودا.

4. ضع تشارحًا من الخارج نحو الدَّاخل مبرهنًا ومعلِّلًا كل خطوة:

إذا كان قد تم التعرف بشكل صحيح على الخواتم الثلاث وكان الصولجان أصيلًا، فإن ثقافة الأجو (Ajo) سابقة زمنيًّا على ثقافة التولا (Tula) إذا وفقط إذا كانت ثقافة التولا معاصرة أو منحدرة من ثقافة الحفريات المعاصرة.

9 التكافؤ (التلازم)

تكون صورتان صدقيتان متُكافِئتين (متلازمتين) إذا تطابقت قيمهما الصدقية في جميع التأويلات الممكنة لحروفها؛ أو بعبارة أخرى، إذا تطابقتا في كل حالة على حدة في التحليل الصدقي. هناك حالات تكافؤ عديدة تمت الإشارة إليها في الفصول 1-3:

- تتكافأ «ب» و«⌐⌐ب» و«ب ∧ ب»، و«ب ∨ ب».
- تتكافأ «ب ∧ جـ∧. د» و«ب ∧. جـ∧ د».
- تتكافأ «ب ∧ جـ» و«جـ ∧ ب»، و«⌐(⌐ب ∨ ⌐جـ)».
- تتكافأ «ب ∨ جـ ∨ د» و«ب∨ .جـ∨ د)».
- تتكافأ «ب ∨ جـ» و«جـ ∨ ب» و« ⌐(⌐ب ∧ ⌐جـ)».
- تتكافأ «⌐(ب ∧ جـ) » و«⌐ب ∨ ⌐جـ».
- تتكافأ «ب ← جـ» و«⌐(ب ∧⌐جـ)» و«⌐ب∨ جـ».
- تتكافأ «⌐(ب ∨ جـ)» و«⌐ب ∧ ⌐جـ».
- تتكافأ «ب↔ جـ» و«ب ← جـ∧. جـ ← ب» و«⌐(ب ∧ ⌐ جـ) ∧ ⌐(جـ ∧ ⌐ب) ».

ولكي نتحقق من تكافؤ عبارتين يُمكن أن نجري تحليلات صدقية للعبارتين لنرى إن كانتا تتطابقان في كل حالة على حدة. غير أنه هناك طريقة أخرى تبدو أسهل: نصوغ العبارتين تشارطيًا، ثم نتحقق من صحة التشارط. وذلك طبقًا لتعريفنا الذي مفاده أن عبارتين عا$_1$ وعا$_2$ تكونان متُكافِئتين إذا وفقط إذا لم يوجد أي تأويل صدقي تكون فيه القيم الصدقية لـ عا$_1$ وعا$_2$ غير

متطابقة، وبالتالي إذا وفقط إذا لم يوجد أي تأويل يُكذِّب التشارط الذي يكون طرفاه عا$_1$ وعا$_2$. وهكذا، ما دام اللزوم هو صحة الشرط، فكذلك التكافؤ (التلازم) هو صحة التشارط[1].

للبت في التكافؤ بين «ب ∧. جـ ∨ د» و«ب ∧ جـ ∨ ب ∧ د»، مثلًا، نتحقق من صحة التشارط الذي يطابقها[2]:

ب ∧. جـ ∨ د . ↔. ب ∧ جـ ∨ ب ∧ د

ص ∧ .جـ ∨ د. ↔ . ص ∧ جـ ∨ ص ∧ د	ك ∧ .جـ ∨ د. ↔. ك ∧ جـ ∨ ك ∧ د
جـ ∨ د. ↔ . جـ ∨ د	ص
ص	
ص	ص

يمكن أن نتحقق بالطريقة نفسها من تكافؤ «ب» وكل واحدة من العبارات التالية:

(1) ¬¬ب؛ ب ∧ ب؛ ب ∨ ب؛ ب ∨ ب ∧ جـ؛ ب ∧ .ب ∨ جـ؛ ب ∧ جـ ∨ ب ∧ ¬جـ؛ ب ∨ جـ ∧. ب ∨ ¬جـ

سبق القول بأن الغرض الأول للمنطق، عند تطبيقه على القول العادي، هو تعليل الاستدلال ونقده. غير أن هناك غرضًا ثانيًا، لا يقل أهمية عن الأول، مؤدَّاه تحويل العبارات: إذ نرغب في غالب الأوقات في تحويل عبارة إلى أخرى «تقول الشيء نفسه»، لها صيغة مختلفة، أي صيغة ربما تكون

(1) كما أطلقنا على اللزوم صحة الشرط، يُمكن أن نصطلح على صحة التشارط التلازم كتشارح للتكافؤ. [المترجم]

(2) طبقا للمنهجية المذكورة في الفصل الخامس، نترك للقارئ مهمة القيام بكل خطوات التحليل البينية. مناط ذلك أن المرحلة الوسطى «جـ ∨ د. ↔ . جـ ∨ د» تظهر في الخانة اليمنى من التحليل، وأن الانتقال من هذه المرحلة إلى «ص» لا يتم بواسطة التحليل، بل بواسطة قواعد صحة الجمل الظاهرة، الفصل السادس.

أكثر بساطة، أو أكثر ملاءمة للأغراض المنشودة. وعليه، نظرا لأنه بمقدورنا التحقق من تحويلات من هذا القبيل بواسطة اعتبارات تقتصر على بِنى الدوالّ الصدقية فحسب (دون الرجوع إلى أنواع أخرى من البِنَى المنطقية التي تتجاوز نطاق الباب الأول)، فإننا نمتلك بالفعل تقنية للتحقق منها تكمُن في اختبار البتّ في تكافؤ الدوال الصدقية للعبارات: إذ نحوّل، على سبيل المثال، العبارة التالية:

(2) سيلقي قائد البحرية الكلمة وسيقدّمه إما عميد الكلية أو رئيس الجامعة إلى:

(3) إما سيلقي قائد البحرية الكلمة وسيقدمه عميد الكلية أو سيلقي قائد البحرية الكلمة وسيقدمه رئيس الجامعة،

أو العكس بالعكس، إذ يتم التحقق منها بواسطة تكافؤ «ب ∧ .جـ ∨ د» و«ب ∧ جـ ∨ ب ∧ د»، ويتم التحقق من هذا التكافؤ باختبار آلي على منوال ما ذكر أعلاه. يُمكن الإقرار بأن العبارتين (2) و(3)، إذا عددنا الاصطلاح المماثل لذلك الوارد في الفصل السابع، متكافِئتين صدقيًا.

من البديهي، بموجب تعريفاتنا وتقنيات تحققنا، أن:

(1) التكافؤ هو اللزوم المتبادل (التلازم).

يلزم عن هذا القانون، وعن القوانين (1)- (4) من الفصل السابع، بوضوح:

(2) كل عبارة تُكافِئ نفسها.

(3) إذا كافأت عبارة ما عبارة ثانية وكافأت الثانية عبارة ثالثة، فإن الأولى تُكافِئ الثالثة.

(4) إذا كافأت عبارة ما عبارة ثانية، فإن الثانية تُكافِئ الأولى (وهذا ليس هو حال الشرط!).

(5) تكون العبارات الصحيحة متُكافِئة، ولا تكون متُكافِئة مع غيرها؛ والحكم نفسه يسري على العبارات المتناقضة.

لقد تبين في الفصل السادس أن الإنابة تحافظ على الصحة. وحيث إن اللزوم والتلازم هما ببساطة صحة الشرط وصحة التشارط، فإنه يلزم عن ذلك أن الإنابة تحافظ على اللزوم والتكافؤ أيضًا. يُمكن، مثلًا، أن نبرهن، انطلاقًا من تكافؤ «ب» وكل العبارات المذكورة في (1)، بواسطة الإنابة أن «¬د» تُكافِئ «¬¬¬د»، و«¬د ∧ ¬د»، و«¬د ∨ ¬د»، و«¬د ∨ ¬د ∧ هـ»، إلخ.، وأن «¬جـ ∧ د» تُكافِئ كلًّا من «¬¬(¬جـ ∧ د)» و«¬جـ ∧ د ∧ ¬جـ ∧ د»، و«¬جـ ∧ د ∨ ¬جـ ∧ د»، إلخ. وكذلك الحال بالنسبة إلى كل إنابة نجريها على «ب» و«ج» في (1). سنستعمل لاحقًا هذه المجموعة الخاصة من التكافؤات التي حصلنا عليها كوسيلة لاختصار العبارات.

يساعدنا اعتماد الإنابة تلقائيًا تعليل هاتين الطريقتين المناسبتين في وصف اللزوم بلغة التكافؤ:

(6) عا$_1$ تستلزم عا$_2$ إذا وفقط إذا كانت عا$_1$ تُكافِئ وصل عا$_1$ وعا$_2$.

(7) عا$_1$ تستلزم عا$_2$ إذا وفقط إذا كانت عا$_2$ تُكافِئ فصل عا$_1$ وعا$_2$.

وحتى نعلل (6) لننتبه أولًا إلى أن «ب ← ج» و«ب ↔ جـ ∧ ب» متُكافِئتان بواسطة التحليل الصدقي. ويلزم عن ذلك، بواسطة الإنابة، أن الشرط المكوَّن من عا$_1$ وعا$_2$ يُكافئ التشارط المكوَّن من عا$_1$ ومن وصل عا$_1$ وعا$_2$. وعليه، يكون الشرط، حسب (4)، صحيحًا إذا وفقط إذا كان هذا التشارط صحيحًا. غير أن صحة الشرط تعني اللزوم، وصحة التشارط تعني التلازم؛ ومن ثمة تنتج (5). ويتم تعليل (7) بالمنوال نفسه عبر التحقق من تكافؤ «ب ← ج» و«جـ ↔. ب ∨ ج».

أما القانونان التاليان فيتعلقان باللزوم فقط، غير أنني لم أوردهما إلا الآن لكونهما يَنتُجان بسهولة عن (6) و(7).

(8) عا تستلزم كلًا من عا$_1$ وعا$_2$ على حدة، إذا وفقط إذا كانت عا تستلزم وصل عا$_1$ وعا$_2$.

(9) عا$_1$ و عا$_2$ تستلزمان، كل واحدة منهما على حدة، عا إذا وفقط إذا كان فصل عا$_1$ وعا$_2$ يستلزم عا.

تعليل (8): هب أن عا تستلزم عا$_1$ وعا$_2$. حينها تُكافِئ عا، وَفقًا لـ (6)، وصل عا وعا$_1$، وكذا وصل عا وعا$_2$. وعليه تُكافِئ عا وصل العبارات الثلاثة. بَيْد أنّه وَفقًا لـ (6)، يماثل ذلك القول بأنّ عا تستلزم وصل عا$_1$ وعا$_2$. لذا رأينا أنه إذا كانت عا تستلزم عا$_1$ وعا$_2$ أيضًا، فإنها تستلزم وصلهما. وعكسهما مبتذل.

أترك برهنة موازية على (9) بناء على (7) للقارئ.

يزودنا القانونان (8) و (9) بتوسيع مناسب لطريقة الفحص الانتقائي. مثلًا، نتحقق مما إذا كانت «ب∧جـ∨ ¬ب ∧د ∨ جـ∧¬ د» تستلزم صورة معينة، يكفي (بفضل (9)) أن نتحقق مما إذا كانت العبارات «ب ∧ ج» ، و«¬ب∧د» و«جـ ∧¬د» كل واحدة على حدة تستلزمها بشكل فردي، وهو ما يُمكن أن نتبيّنه بواسطة ثلاث عمليات للفحص الانتقائي. وبالمثل، إذا أردنا أن نتحقَّق مما إذا كانت صورة معينة تستلزم «ب ∨ جـ∧. ب ← د ∧ . جـ ∨ ¬د»، يكفي (بفضل (8)) أن نرى إن كانت هذه الصيغة تستلزم كلًّا من «ب∨جـ»، و«ب←د»، و«جـ ∨¬د»، وهو ما يُمكن تبيّنه أيضًا بواسطة ثلاث عمليات للفحص الانتقائي.

ينبغي ألّا نأمل في بناء (8) و(9) في شكل مربع بافتراض أن عا تستلزم إما عا$_1$ أو عا$_2$ في كل مرة تستلزم عا فصلهما؛ وألا نعمد أيضًا إلى افتراض أن عا$_1$ أو عا$_2$ تستلزم عا في كل مرة يستلزم وصلهما عا. حاصل القول، إنَّ «ب» تستلزم «ب∧جـ∨ ب ∧ ¬جـ» دون أن تستلزم «ب∧جـ» أو «ب∧¬جـ»؛ وتلزم «ب» عن «ب ∨ جـ∧. ب ∨ ¬جـ» دون أن تلزم عن «ب ∨ جـ» أو عن «ب ∨ ¬جـ».

تكمن الإنابة في وضع الصيغ بدل الحروف المفردة بالنسبة إلى كل مواقع الحروف. وعندما لا يتم استيفاء هذه الشروط لا نصطلح على وضع صيغة

بدل أخرى بالإنابة، بل المبادلة. وعليه، تكمُن المبادلة في وضع صيغة بدل أخرى ليس من الضروري أن تكون حرفًا مفردًا وأن تستبدل في كل مواقعها. وبالطبع لا يُمكن تعدية ما قلناه عن الإنابة، من أنها تحافظ على اللزوم والتكافؤ والتناقض، على المبادلة بشكل عام. غير أن هناك قواعد للمبادلة مفيدة أقلّها **القانون الأول للمبادلة** التالي: هب أنّ «...ب...» عبارة تضم «ب»، وهب أن «...جـ...» تتكون من «...ب...» عبر وضع «جـ» في موقع أو أكثر لـ «ب»: فإننا سنحصل على:

«ب ↔ جـ» تستلزم «...ب... . ↔ . ...جـ...».

(وكذلك الشأن بالنسبة إلى كل حرف بدل «ب» و«جـ») دعونا نرَلماذا يصدق هذا القانون. نود أن نبين أن كل تأويلات الأحرف التي تصدق فيها «ب ↔ جـ» تجعل «...ب... .↔. ...جـ...» صادقة أيضًا. لكن لكي تصدق «ب ↔ جـ» يجب إما أن نضع «ص» بدل «ب» و«جـ» معًا، وإما أن نضع «ك» بدل «ب» و«جـ» معًا، وفي كلتا الحالتين تصبح «...ب...» و«....جـ...» اللتين لا تختلفان سوى في «ب» و«جـ» غير متمايزتين عن بعضهما البعض، بحيث يرتد تشارطهما إلى «ص».

نستطيع الآن وضع **القانون الثاني للمبادلة**، أكثر أهمية من سابقه، مفاده: إذا كانت عا$_1$ وعا$_2$ متُكافِئتين، وكانت عا$'_2$ مصوغة انطلاقًا من عا$'_1$ عبر وضع عا$_2$ في موقع أو أكثر من عا$_1$، فإن عا$'_1$ وعا$'_2$ متُكافِئتان. يُمكننا هذا القانون، على سبيل المثال، من أن نستدل انطلاقًا من تكافؤ «ب→جـ» و«¬(ب ∧ ¬جـ)»، على تكافؤ «ب → جـ .∨ د» و«¬(ب ∧ ¬جـ) ∨ د». إن الفكرة تقريبًا، بتعبير مدرسي، هي أن وضع أشياء متساوية بدل أشياء متساوية ينتج أشياء متساوية.

يُمكن صياغة القانون الثاني للمبادلة كما يلي: لنختر حرفين قضويين ما لا يظهران في عا$'_1$ وفي عا$'_2$، وليكونا «ب» و«جـ». ثم نضع «ب» في كل المواقع

المعنية لـ عا$_1$ في عا$'_1$: يُمكن أن نصوغ النتيجة كما يلي: «...ب...»، ونعبر عن النتيجة المماثلة لها باستعمال «ج» كالآتي: «...جـ...». وطبقًا لقانون المبادلة الأول، تستلزم العبارة «ب ↔ ج» الصيغة «...جـ... .↔. ... ج ...». ونستطيع أن نستنتج، عند إنابة عا$_1$ بـ «ب» وعا$_2$ بـ «ج» في هذا اللزوم، أن التشارط بين عا$_1$ وعا$_2$ يستلزم التشارط بين عا$'_1$ وعا$'_2$. غير أن التشارط بين عا$_1$ وعا$_2$ صحيح لأن عا$_1$ وعا$_2$ متكافِئتان. وعليه فإن التشارط بين عا$'_1$ وعا$'_2$ صحيح؛ انظر (4) في الفصل السابع. وبالتالي فإن عا$'_1$ وعا$'_2$ متكافِئتان.

يضمن لنا هذا القانون الثاني إمكانية مبادلة العبارات المتُكافِئة من قبيل عا$_1$ وعا$_2$ في أي صورة عا$'_1$ دون أن تؤثر في نتيجة التحليل الصدقي؛ لذا ستكون عا$'_1$ والنتيجة عا$'_2$ متكافِئتان، والصور المتُكافِئة هي تلك التي تتطابق جميع حالات تحليلها الصدقي. ومن هذا نشتق القانون الثالث للمبادلة التالي: تحافظ مبادلة الصيغ المتُكافِئة على الصحة واللزوم والتكافؤ والتناقض؛ بل وتحافظ، بخلاف إنابة الأحرف، على الاتساق وعدم الصحة عدم اللزوم وعدم التكافؤ.

يجب أن تكون إنابة الأحرف، كما رأينا، موحدة وتامة؛ غير أن مطلبًا من هذا النوع لا يوجد بالنسبة إلى مبادلة الصيغ المتُكافِئة. فإذا أنبنا في العبارة «ب ∨ ¬ب» «ب ∧ د» بـ «ب»، يُمكن أن نستنتج صحة «جـ ∧ د ∨ ¬(جـ ∧ د)» فقط دون غيرها؛ أما إذا اخترنا بالأحرى أن نضع، في العبارة الصحيحة نفسها «ب ∨ ¬ب»، «ب ∧ ب» مكان مكافئتها، «ب»، سيكون من حقّنا ألّا نستنتج صحة «ب ∧ ب ∨ ¬(ب ∧ ب)» فحسب، بل «ب ∧ ب ∨ ¬ب» و«ب ∨ ¬(ب ∧ ب)» أيضًا.

وحيث إن مبادلة الصيغ المتُكافِئة لا تؤثّر في نتيجة التحليل الصدقي، يتبيّن أنّنا حصلنا هنا على مُتمِّم مناسب لتقنية التحليلات الصدقية؛ لأننا إذا استبدلنا، في مسار هذه التحليلات الصدقية، بعض الصور بأخرى

مكافئة لها وأكثر بساطة، فإن ذلك سيؤدّي إلى اختزال حساباتنا. دعونا على الخصوص نقُم على التوِّ، كلما ظهرت صيغة من الصيغ السبع التي عرضنا في (1) خلال إجراء التحليل الصدقي، بالاختصار قبل أن نتقدم في التحليل. ليس بإمكاننا وضع الحرف القضوي «ب» مكان مُكافِآته فقط «¬ ¬ب»، و«ب ∧ ب» و«ب ∨ ب»، و«ب ∨ (ب ∧ ج)»، إلخ. فحسب، بل أن نضع في المقابل «¬د» مكان «¬¬¬د»، و«¬د ∧ ¬د»، و«¬د ∨ ¬د»، و«¬د ∨ ¬د ∧ هـ»، إلخ. أو نضع أيضًا «(¬جـ∧د)»، مكان «¬¬(¬جـ ∧د)»، و«¬جـ ∧ د ∧ ¬جـ ∧ د»، و«¬جـ∧ د ∨ ¬جـ∧ د»، إلخ.

وباستحضار منهجيتنا ذهنيًا، لنستعد الصيغة الطويلة التي قمنا بتحليلها في الفصل السادس:

ب ∨ جـ.∧ ب ∨ ¬جـ. ∨ ¬ب ∧ جـ: ↔ جـ: ←. ب ∧ د ∨ ب ∧ ¬د

ب ∨ ¬ب ∧ جـ ↔ جـ: ← ب

ص ∨ ك ∧ جـ. ↔ جـ: ← ص   ك ∨ ص ∧ جـ. ↔ جـ: ← ك

ص   ¬ (جـ ↔ جـ)

ك

ص   ك

لقد أخضعنا الصورة الأصلية لجملة من الاختصارات حتى قبل أن نشرع في إنابة الحرف القضوي «ب»، وهي اختصارات تكمُن في اختزال «ب ∨ جـ ∧ ب ∨ ¬جـ» و«ب ∧ د ∨ ب ∧ ¬د» إلى «ب»، لأن «ب ∨ جـ ∧ ب ∨ ¬جـ» هي فعلًا الأخيرة في الصور الواردة في (1)، في حين أن «ب ∧ د ∨ ب ∧ ¬د» هي ما قبل الأخيرة حيث تنوب «د» عن «جـ».

لنعد الآن إلى التحليل الصدقي الطويل الذي عرضناه في الفصل

السادس مسلحين بالإجراء الجديد وهو ما سيجعل التحليل بالأحرى على هذا النحو الآتي:

<table dir="rtl">
<tr><td colspan="4">ب ∧ جـ ∨ ب ∧ ¬د ∨ ¬ب ∧ د ∨ ¬ب ∧ هـ ∨ ¬جـ ∧ د ∨ ¬د ∧ ¬هـ</td></tr>
<tr><td colspan="2">ص ∧ جـ ∨ ص ∧ ¬د ∨ ك ∧ د ∨ ك ∧ هـ ∨ ¬جـ ∧ د ∨ ¬د ∧ ¬هـ
جـ ∨ ¬د ∨ ¬جـ ∧ د ∨ ¬د ∧ ¬هـ
جـ ∨ ¬د ∨ ¬جـ ∧ د</td><td colspan="2">ك ∧ جـ ∨ ك ∧ ¬د ∨ ص ∧ د ∨ ص ∧ هـ ∨ ¬جـ ∧ د ∨ ¬د ∧ ¬هـ
د ∨ هـ ∨ ¬جـ ∧ د ∨ ¬د ∧ ¬هـ
د ∨ هـ ∨ ¬د ∧ ¬هـ</td></tr>
<tr><td>ص ∨ ¬د ∨ ك ∧ د
ص</td><td>ك ∨ ¬د ∨ ص ∧ د
¬د ∨ د
ص</td><td>ص ∨ هـ ∨ ك ∧ ¬هـ
ص</td><td>ك∨ هـ∨ص∧¬هـ
هـ ∨ ¬هـ
ص</td></tr>
</table>

لا واحدة من الصيغ السبع الواردة في (1) تظهر في الصورة الأصلية كما هي معطاة، وإن كان البعض منها يظهر خلال تطور التحليل. ففي الخانة اليمنى، اختزلنا «جـ ∨ ¬د ∨ ¬جـ ∧ د ∨ ¬د ∧ ¬هـ» إلى «جـ ∨ ¬د ∨ ¬جـ ∧ د» بوضع «¬ د» مكان «¬د ∨ ¬د ∧ ¬هـ». وفي الخانة اليسرى اختزلنا، بشكل مماثل، «د ∨ هـ ∨ ¬جـ ∧ د ∨ ¬د ∧ ¬هـ» إلى «د ∨ هـ ∨ ¬د ∧ ¬هـ» عبروضع «د» مكان «د∨ ¬جـ ∧د».

يقوم الاختصاران الأخيران المذكوران معًا على تكافؤ «ب ∨ ب ∧ جـ» و«ب»؛ علاوة على أنهما ينطويان على تبادل ذهني لروابط الوصل والفصل. فالجملة «¬د ∨ ¬د ∧¬هـ» التي يجب أن تترك مكانها لـ «¬د» لا تظهر في «جـ ∨ ¬د ∨ ¬جـ ∧ د ∨ ¬د ∧¬هـ» إلا عندما نعتبر الجزء «¬جـ ∧ د ∨ ¬د

∧ ¬هـ» تحويلًا يُقرأ «¬د ∧ ¬ هـ ∨ ¬جـ ∧ د»؛ كما أن الجملة «د ∨ ¬جـ ∧ د» لا تظهر في «د ∨ هـ ∨ ¬جـ ∧ د ∨ ¬د ∧ ¬هـ» إلا عندما نعتبر الجزء «هـ ∨ ¬جـ ∧ د» تحويلاً يُقرأ «¬جـ ∧ د ∨ هـ». وحتى عندما نعزل الجملة «د ∨ ¬جـ ∧ د»، فإن تكافؤها مع «د» لا يستنتج من تكافؤ «ب ∨ ب ∧ ج» و«ب» بواسطة الإنابة فقط: علينا أن نعيد قراءة «د ∨ ¬جـ ∧ د» ذهنيًا باعتبارها «د ∨ د ∧ ¬جـ» عبر تبديل الوصل. وينطوي مثل هذا التبديل التمهيدي للفصل والوصل على مطلب ضمني لإجراء تكافؤات أخرى، أي تكافؤ «ب ∨ ج» و«جـ ∨ ب»، وتكافؤ «ب ∧ج» و«جـ ∧ ب». وستصبح هذه المراحل لاواعية إذا ما مرنّا أنفسنا، قدر المستطاع بشكل جيّد، على تجاهل الترتيب المطبعي لمكونات الوصل والفصل.

سيكون أمرًا اعتباطيًا أن نخص بالذّكر هذه التكافؤات السبعة فقط، أعني تكافؤ «ب» مع الصور السبع الواردة في (1)، كأساس للاختصارات المكمِّلة للتحليل الصدقي. إذ يوجد تكافؤ آخر ملائم، كان من الممكن أن نستغلّه بالفعل في التحليلين الصدقيين الأخيرين المذكورين، وهو تكافؤ «ب ∨ ¬ب ∧ ج» و«ب ∨ج». بالإضافة إلى تكافؤ ملائم آخر مؤدّاه تكافؤ «ب . ∧ ¬ب ∨ ج» و«ب ∧ ج». سيعمد الباحث المتمرس إلى استعمال كل التكافؤات التبسيطية المتاحة. ولتوحيد التمارين، يُمكن لتوافق ملائم أن يسمح لنا باستعمال المتُكافِئات السبعة الواردة في (1) وكذا تلك التي جمعناها في بداية هذا الفصل.

تقبل **التشارطات الخالصة**، أي الصور المبنية من أحرف قضوية بواسطة الرابط «↔» فقط، اختبار تكافؤ بسيط ومذهل: إذ تكون متُكافِئة إذا وفقط إذا ظهرت الأحرف نفسها بعدد فردي من المرات في كل منها. يكون التشارط الخالص صحيحًا إذا وفقط إذا لم يرد أي حرف فيه عددًا فرديًا من المرّات. علاوة على ذلك، يُمكن لعلامات النفي أن تُنثر على

التشارط الخالص دون أي تأثير إذا كان عددها زوجيًّا. تعود هذه الملاحظات إلى ليسنييفسكي (Leśniewski) (ص. 26 ، 29).

لمحة تاريخية: لقد أدّى الخلط بين الشرط واللزوم، الذي لم نرضَ عنه في الفصل السابع، إلى خلط بين التشارط والتلازم. وتستمر العادة المؤسِفة التي تتجلّى في قراء الرمز «↔» «مكافِئ له» بدل «إذا وفقط إذا». ⌊

تمارين

1. عيّن من بين العبارات الآتية أيها مكافئة للعبارة «ب ∧ جـ ← د» وأيها تُكافِئ العبارة «ب ∨ جـ . ← د»:

ب ←. جـ ← د؛ جـ ←. ب ← د؛ ب ← د . ∧ جـ ← د؛ ب ← د .∨. جـ ← د.

2. عيّن من بين العبارات الآتية أيها مكافئة للعبارة «ب ← جـ ∧ د» وأيها تُكافِئ العبارة «ب ←. جـ ∨ د»:

ب ← جـ .∧. ب ← د؛   ب ← جـ .∨. ب ← د.

3. عيّن من بين العبارات الآتية الأزواج المتُكافِئة:

ب ← جـ، ¬ب ← ¬جـ، ¬ب ← جـ، جـ ← ب، ¬جـ ← ¬ب، ¬جـ ← ب.

وهذا يعني الحاجة إلى خمسة عشر اختبارًا مختصرًا.

4. تحقق من تكافؤ كل زوج من الأزواج الثلاثة بواسطة التحليل الصدقي للتشارطات الآتية مستعملًا الطريقة الجديدة للاختصار:

ب ∧ جـ ∨ ب ∧ د ∨ جـ ∧ د،   ب ∨ جـ ∧ ب ∨ د. ∧ جـ ∨ د؛

ب ∧ جـ ∧ د ∨ ب ∧ جـ ∧ هـ ∨ ب ∧ د ∧ هـ ∨ جـ ∧ د ∧ هـ،

ب ∨ جـ ∨ د .∧. ب ∨ جـ ∨ هـ .∧. ب ∨ د ∨ هـ .∧. جـ ∨ د ∨ هـ؛

ب ∧ جـ ∧ د ∨ ب ∧ جـ ∧ ¬د ∨ ب ∧ ¬جـ ∧ د ∨ ب ∧ ¬جـ ∧ ¬د،

ب V جـ V د .∧ ب V جـ V ¬د .∧ ب V ¬جـ V د .∧ ب V ¬جـ V ¬د.

5. تحقق بالطريقة نفسها من تكافؤ العبارات الآتية في ما بينها:

ب ←. جـ ↔ د، ب ∧ جـ ↔ ب ∧ د، ب V جـ .↔. ب V د.

6. تحقق بالطريقة نفسها من تكافؤ العبارتين الآتيتين:

ب ← جـ .∧ جـ ← د .∧ د ← ب، ب ↔ د .∧ جـ ↔ د.

7. بيّن إن كان التشارط يتمتع بخاصية التجميع.

8. علّل (9).

10 الصور القانونية الفصلية

من المعلوم أن الترميزات «∨» و«→» و«↔» نافلة، لأن كل استعمالاتها يُمكن تشارحها برابطي الوصل والنفي. لقد أشرنا من قبل إلى أن الرمز «→» له فائدة خاصة في التحقق من اللزوم ما دام التحقق من هذا الأخير يمرّ عبر صياغة عبارة شرطية (باستعمال «→») ثم نتحقق من صحته. كما رأينا أن الرمز «↔» يستعمل الطريقة نفسها للتحقق من التكافؤ (التلازم). هناك، إذًا، سبب وجيه يدفعنا لإضافة الرمزين النافلين بالضبط «→» و«↔». في حين أن المزايا التي تجعلنا نحتفظ بـ «∨» ذات طبيعة مختلفة تمامًا، وستبدو بديهية في هذا الفصل والذي يليه.

يثبت القانونان اللذان يحملان اسم دي مورغان التكافؤين التاليين:

(1) «¬(ب ∨ جـ ∨ … ∨ هـ)» تكافِئ «¬ب ∧ ¬جـ ∧ … ∧ ¬هـ»

و(2) «¬(ب ∧ جـ ∧ … ∧ هـ)» تكافِئ «¬ب ∨ ¬جـ ∨ … ∨ ¬هـ».

لقد سبقت الإشارة إلى حالتي «ب» و«ج» بمفردهما في الفصل الأول. أما باقي الحالات فنتج عنها بالإنابة والمبادلة. فمثلًا، نحصل على تكافؤ «¬(ب ∨ جـ ∨ د)» و«¬(ب ∨ جـ) ∧ ¬ د» انطلاقًا من تكافؤ «¬(ب ∨ جـ)» و«¬ب ∧ ¬جـ» عبر إنابة «ب ∨ جـ» بـ «ب» وإنابة «د» بـ «جـ»؛ فنحصل بذلك على تكافؤ «¬(ب ∨ جـ ∨ د)» و«¬(ب ∨ جـ) ∧ ¬د». وعليه عندما نضع «¬ب ∧ ¬جـ» مكان مكافئتها «¬(ب ∨ جـ)»، نحصل على تكافؤ «¬(ب ∨ جـ ∨ د)» و«¬ب ∧ ¬ جـ ∧ ¬د».

يفيدنا قانونا دي مورغان في تجنب نفي العبارات الوصلية والفصلية. إذ لا نحتاج أبدًا إلى إدخال النفي على العبارة الفصيلة برمتها ما دام أنَّ «¬(ب ∨ جـ ∨ ... ∨ هـ)» تُكافِئ «¬ب ∧ ¬جـ ∧ ... ∧ ¬هـ»: ولا نحتاج أبدًا إلى إدخال النفي على العبارة الوصلية برمتها ما دام أنَّ «¬(ب ∧ جـ ∧ ... ∧ هـ)» تُكافِئ «¬ب ∨ ¬جـ ∨ ... ∨ ¬هـ». وبالطبع لا نحتاج أبدًا إلى إدخال النفي على النفي، ما دام أنَّ «¬¬ب» تُكافِئ «ب». ولهذا السبب لا نحتاج أبدًا إلى إدخال النفي على الشرط أو على التشارط، ما دام أنه من السهل علينا أن نتحقق، تبعًا للطريقة الواردة في الفصل السابق، من التكافؤين بين:

(3) «¬(ب ← جـ)» تُكافِئ «ب ∧ ¬جـ»

و(4) «¬(ب ↔ جـ)» تُكافِئ «¬ب ↔ جـ» و«ب ↔ ¬جـ».

وعلى هذا النحو، يُمكن تحويل كل صورة صدقية إلى أخرى مكافئة لها لا ينطبق النفي فيها سوى على الأحرف الفردية. وهذا الأسلوب من التحويل يقود، على العموم، إلى فهم أسهل.

لنأخذ، على سبيل المثال، الصورة الممنوعة:

(1) ¬{ب ← ¬هـ ∧ جـ ← ¬ (هـ ∧ جـ ← ب): ∧ ¬[¬(د ∧ ب) ∧ ¬(ب ← ¬هـ)]}.

(قد ينفعنا تنويع الأقواس بالحاضنات والمعقوفات عندما تتراكب بعمق).

وبما أن العبارة (1) لها الصيغة العامة «¬ (ف ∧ ق)» فمن الممكن أن نحوِّلها، طبقا لـ (2)، إلى الصيغة الآتية:

¬[ب← ¬هـ ∧ جـ.← ¬(هـ ∧ جـ ← ب)] ∨ ¬ ¬[¬(د ∧ ب) ∧ ¬(ب←¬هـ)].

التي تختزل بعد حذف النفي المزدوج «¬¬» إلى:

(2) ¬[ب ←¬هـ∧جـ.← ¬(هـ∧جـ←ب)] ∨ ¬(د ∧ ب) ∧ ¬(ب ← ¬هـ)].

وباعتماد (3) نستطيع تحويل الطرف الأول من (2) كالآتي:

ب ← ¬هـ ∧ جـ. ∧ ¬¬(هـ ∧ جـ ← ب)،

أو:

ب ← ¬هـ ∧ جـ .∧ هـ ∧ جـ ← ب.

بحيث تصبح العبارة (2) كالآتي:

(3) ب ← ¬هـ ∧ جـ . ∧هـ ∧ جـ ← ب. ∨ ¬(د ∧ ب) ∧ ¬(ب ← ¬هـ).

وبموجب (2) أيضًا تصبح «¬ (د ∧ ب)» هنا كالآتي: «¬د ∨ ¬ب». وبواسطة (3) أيضًا تصبح «¬(ب ← ¬هـ)» كالآتي: «ب ∧ ¬ ¬هـ» أو «ب ∧ هـ»؛ بذلك تصير (3) كما يلي:

(4) ب ← ¬هـ ∧ جـ .∧ هـ ∧ جـ ← ب .∨. ¬د ∨ ¬ب .∧ ب ∧ هـ

حيث يرتبط أخيرًا النفي بالحروف المفردة فقط. وهو ما يجعل الصيغة (4) أسهل فهما بكثير من (1).

تلك هي مزية قصر النفي على الأحرف المفردة. بَيْد أننا سنكتشف، عمومًا، أنه يُمكن الحصول على وضوح أكثر إذا حصرنا الوصل على الأحرف والأحرف المنفية؛ وسنكتشف أيضًا أن مثل هذا الحصر للوصل على الأحرف المفردة، شأنه شأن حصر النفي على الأحرف، يُمكن أن يُنجز دائمًا. يعرف القانون الذي يُمكننا من ذلك بقانون توزيع الوصل على الفصل الذي نصوغه على النحو الآتي:

تتكافأ «ب ∧. جـ ∨ د ∨ ... ∨ ف» و«ب ∧ جـ ∨ ب ∧ د ∨ ... ∨ ب ∧ ف».

أيًا كان عدد الأحرف القضوية، يُمكن أن نتحقق من التكافؤ توًا بواسطة الطريقة الواردة في الفصل السابق:

<table>
<tr><td colspan="2">ب ∧. جـ ∨ د ∨ ... ∨ ف .↔. ب ∧ جـ ∨ ب ∧ د ∨ ... ∨ ب ∧ ف</td></tr>
<tr><td>ص ∧ جـ ∨ د ∨ ... ∨ ف . ↔ . ص ∧ جـ ∨
ص ∧ د ∨ ... ∨ ص ∧ ف
جـ ∨ د ∨ ... ∨ ف . ↔ . جـ ∨ د ∨ ... ∨ ف
ص</td><td>ك ∧. جـ ∨ د ∨ ... ∨ ف . ↔ . ك ∧ جـ ∨
ك ∧ د ∨ ... ∨ ك ∧ ف
ك ↔ ك
ص</td></tr>
</table>

يسمح هذا القانون، كما هو حال قانون الهُوِيّة المعروف في الجبر:

سـ (ع + ص + ... + ن) = سـ ع + سـ ص + ... + سـ ن

بعملية «توزيع الضرب». بفضله لا نحتاج أبدًا إلى الإذعان للوصل الذي يشمل الفصل من بين مكوناته؛ إذ نستطيع دائمًا أن نوزع طرف الوصل على الفصل، كما هو الحال أعلاه، بحيث ينتج عن ذلك عبارة فصلية تتكون من موصولات أكثر بساطة.

وبما أن الترتيب غير مهم بالنسبة إلى الوصل، فيمكن للتوزيع أن يتم بالعكس أيضا: فالعبارة «ب ∧ جـ ∨ د ∨ ... ∨ ف» لا تُكافِئ «ب ∧ جـ ∨ ب ∧ د ∨ ... ∨ ب ∧ ف» فقط، بل إن العبارة «جـ ∨ د ∨... ∨ ف .∧ ب» تُكافِئ «جـ ∧ ب ∨ د ∧ ب ∨ ... ∨ ف ∧ ب» أيضًا. وهذان الضربان من التوزيع يصيران متماثلين حقًّا بمجرد ما نتعلم كيف نتجاهل ترتيب الوصل.

وعندما نكون أمام وصل مكون من مفصولين، يتخذ التوزيع صيغة «الضرب التبادلي» المألوفة في الجبر، فمثلًا العبارة «ب ∨ ف. ∧ جـ ∨ د ∨ هـ» تتحوّل إلى «ب ∧ جـ ∨ ب ∧ د ∨ ب ∧ هـ ∨ ف ∧ جـ ∨ ف ∧ د ∨ ف ∧ هـ». إذ نبدأ بمعالجة «جـ» ∨ د ∨ هـ كما لو كانت حرفًا مفردًا «ق»؛ وعلى هذا النحو، مثلما تصبح «ب ∨ ف .∧ ق» بواسطة التوزيع (العكسي) هي «ب ∧ ق∨ ف ∧ ق»، تتحول العبارة «ب ∨ ف ∧ جـ ∨ د ∨ هـ» إلى «ب. ∧ جـ ∨ د ∨ هـ .∨. ف .∧ جـ ∨ د ∨ هـ». نتيجة ذلك، يحوِّل توزيع «ب» المقطع «ب .∧ جـ ∨ د ∨ هـ» إلى «ب ∧ جـ ∨ ب ∧ د ∨ ب ∧ هـ»، كما يحوِّل توزيع «ف» المقطع «ف ∧ .جـ ∨ د ∨ هـ» إلى «ف ∧ جـ ∨ ف ∧ د ∨ ف ∧ هـ».

لنعد الآن إلى الصيغة (4) لنطورها بواسطة التوزيع. وعليه نغير المقطع «¬د ∨ ¬ب ∧. ب ∧ هـ» من (4) إلى «¬د ∧ ب ∧ هـ ∨ ¬ب ∧ ب ∧ هـ». فتصير (4) برمتها كالآتي:

(5) ب ← ¬هـ ∧ جـ.∧ هـ ∧ جـ ← ب. ∨ ¬ د ∧ ب ∧ هـ ∨ ¬ ب ∧ ب ∧ هـ

وبذلك نفسح المجال أمام توزيع جديد بحذف الرابط «←». عبر ترجمة «ف ← ق» عمومًا إلى «¬ف V ق»؛ فتتحول بذلك (5) إلى الصيغة:

¬ب V ¬هـ ٨ جـ . ٨ ¬ (هـ ٨ ج) V ب . V ¬ د ٨ ب ٨ هـ V ¬ ب ٨ ب ٨ هـ

فإذا استبدلنا «¬ هـ V ¬ ج» بـ «¬ (هـ ٨ ج)» بواسطة (2) حصلنا على الصيغة التالية:

¬ب V ¬هـ ٨ جـ .٨ ¬هـ V ¬جـ V ب .V ¬ د ٨ ب ٨ هـ V ¬ ب ٨ ب ٨ هـ

نستطيع الآن أن نجري «الضرب المتبادل» على الجزء «¬ب V ¬هـ ٨ جـ .٨ ¬ هـ V ¬جـ V ب» فيصبح الكل كالآتي:

(6) ¬ب ٨ ¬هـ V ¬ب ٨ ¬جـ V ¬ب ٨ ب V ¬هـ ٨ جـ ٨ ¬هـ V ¬هـ ٨ جـ ٨ ¬جـ V ¬هـ ٨ جـ ٨ ب V ¬د ٨ ب ٨ هـ V ¬ب ٨ ب ٨ هـ

ويمكن أن نختصر هذه النتيجة بسرعة عبر حذف العبارات التي يظهر أنها متناقضة مثل: «¬ب ٨ ب» و«¬هـ ٨ جـ ٨ ¬ج» و«¬ب ٨ ب ٨ هـ». فنحصل على:

(7) ¬ب ٨ ¬هـ V ¬ب ٨ ¬جـ V ¬هـ ٨ جـ ٨ ¬هـ V ¬هـ ٨ جـ ٨ ب V ¬د ٨ ب ٨ هـ

يدخل هذا الحذف ضمن الإجراء الذي أوضحناه في الفصل السادس: يُمكن أن نضع بدل كل عبارة متناقضة بشكل واضح «ك». فنحذفها بموجب التحليل ((2) في الفصل 5).

كما نستطيع أن نحذف كل التكرارات من العبارات الوصلية، بحيث نختزل مثلًا «¬هـ ٨ جـ ٨ ¬هـ» إلى «¬هـ ٨ جـ». وهذا الضرب من الاختصار هو الصيغة الثانية من الصيغ السبع التي أوردناها في القانون (1) من الفصل السابق. وعليه تصبح (7) إذًا:

(8) ¬ب ٨ ¬هـ V ¬ب ٨ ¬جـ V ¬هـ ٨ جـ V ¬هـ ٨ جـ ٨ ب V ¬د ٨ ب ٨ هـ

إنها صيغة تُبرِز بوضوح دلالتها. وهو ما لم نكن نستطيع قوله عن مكافئاتها (1) و(4).

تحوز الصيغ (6)-(8) ثلاثة خصائص هامة: أولًا، لا تتضمن «←» و«↔»، ثانيًا، يقتصر النفي فيها على الأحرف المفردة فقط، وثالثًا، يقتصر الوصل على الأحرف والأحرف المنفية فقط. نسمي الصور التي تتوفر على هذه الخصائص الثلاث: الصور القانونية الفصلية.

يمكن أن نعيد صوغ هذا التخصيص السلبي في جوهره بحدود موجبة كما يلي: لنعتبر الأحرف المفردة ونفي الأحرف المفردة معًا أحرفًا؛ ولتكن «ب» و«ج» و«¬ب»، إلخ.. أحرفًا. وهكذا تكون الصور القانونية الفصلية حروفًا ووصل الحروف وفصل الحروف وفصل وصل الحروف وفصل الحروف مع وصل الحروف. يُمكن وضع هذا التوصيف بشكل أكثر إحكامًا إذا سمحنا لأنفسنا بالحديث عن الوصل والفصل ليس فقط بين مكونين أو أكثر، بل لمكون واحد أيضًا -فيدل بذلك على المكوِّن نفسه. في ظل هذا الاستخدام، إن «¬ب» و«¬ب ∧ ج» و«¬ب ∧ ج ∧ ¬د» عبارة عن وصل لحرف واثنين وثلاثة أحرف على التوالي؛ والأمر نفسه بالنسبة إلى الفصل. هكذا، يُمكن وصف الصور القانونية الفصلية ببساطة على أنها **فصل لموصولات الأحرف**- أي فصل لوصل أو أكثر من وصل حرف واحد أو أكثر. تسمى هذه الموصولات، حيث تكون الصور القانونية الفصلية فصلًا، جملة.

يمكن إعادة إنتاج العملية التي تم من خلالها تحويل (1) إلى مكافئتها القانونية الفصلية (6) بالنسبة إلى كل الصور. هب أننا إزاء أي صورة، نستطيع أن نتخلص من «←» و من «↔» بفضل التحويلات المألوفة: «ب ← ج» تصبح «¬ب ∨ ج»، وتصبح «ب ↔ ج» هي «ب ∧ ج ∨ ¬ب∧ ¬ج» وبإمكاننا قصر النفي على الأحرف وحدها بواسطة (1)-(4). أو ببساطة بواسطة (1)-(5) إذا قمنا، قبل كل شيء، بحذف «←» و«↔». وأخيرًا،

نستطيع أن نقصر الوصل على الأحرف بالتوزيع المستمر. وسيكتشف القارئ، بالتجربة، بأننا نقتصد الجهد عمومًا عبر هذه التحويلات عندما ننتقل من الخارج إلى الداخل.

هذا كل ما في الأمر، بالمعنى الدقيق للكلمة، بالنسبة إلى عملية التحويل إلى صورة قانونية فصلية. غير أن الاختزال، كما تم بالانتقال من (6) إلى (8) يظل مرغوبًا فيه على الدوام. إنه يخلِّصنا، كما رأينا، من تكرارات حرف ما داخل جملة ما، كما يخلِّصنا من كل جملة غير متسقة ما عدا، بالطبع، إذا ما كانت الصيغة بأكملها ترتد إلى جملة واحدة غير متسقة، من قبيل «−ج ∧ هـ ∧ ج» التي سيؤدي حذفها إلى حصولنا على لا شيء على الإطلاق. وحتى في هذه الحالة القصوى يُمكن القيام باختزال صغير بالفعل: بإمكاننا أن نكتب «ب ∧ −ب»، ما دامت كل الصور غير المتسقة متكافئة.

هكذا نتوفر في الصورة القانونية الفصلية على اختبار مباشر لعدم الاتساق: فقط قم بالتبسيط بإسقاط الجمل غير المتسقة، بالطريقة المذكورة أعلاه، ومعرفة ما إذا لم يتبقَّ سوى عبارة غير متسقة بشكل واضح.

تكون الصور القانونية الفصلية، عمومًا، ملائمة لأننا نفهم بسهولة كبيرة وبدقة حمولتها: يُمكن أن نقول بمجرد أن نلقي نظرة سريعة عليها ما هي التأويلات التي تجعلها صادقة. على سبيل المثال، هناك تأويل يجعل (8) صادقة إذا وفقط إذا إما تؤوِّل «ب» و«هـ» باعتبارهما كاذبين (فتجعل الجملة الأولى من (8) صادقة)، وإما تؤوِّل «ب» و«ج» باعتبارهما كاذبين (فتجعل الجملة الثانية من (8) صادقة). وإما تؤوِّل «هـ» باعتبارها كاذبة و«ج» صادقة، أو إلخ.

أحد قوانين الاختزال التي تم جمعها في (1) من الفصل التاسع يختزل «ب ∧ ج ∨ ب ∧ −ج» إلى «ب». إذا خرقنا هذا القانون بشكل تراجعي، كقانون معقَّد، يُمكننا توسيع صورة قانونية فصلية إلى صورة أخرى لها

سمات بارزة معينة جديرة بالملاحظة. يسمى هذا التحويل الواسع **التطوير**. حيث تتحول «ب» إلى «ب ٨ جـ ٧ ب ٨ ¬جـ» بواسطة تطوير يتعلق بـ «جـ». فإذا قمنا، الآن، بتطوير كل جملة من جمل الصورة القانونية الفصلية تتعلق بكل حرف لا يرد في هذه الجملة، فإننا سنحصل على صيغة الصورة **القانونية الفصلية المطوَّرة**. على سبيل المثال تصبح «¬هـ ٨ جـ ٧ ¬د ٨ جـ ٨ هـ» في البداية:

¬هـ ٨ جـ ٨ ب ٧ ¬هـ ٨ جـ ٨ ¬ب ٧ ¬د ٨ ب ٨ هـ ٨ جـ ٧ ¬د ٨ ب
٨ هـ ٨ ¬جـ

ثم تصير أخيرًا:

¬هـ ٨ جـ ٨ ب ٨ د ٧ ¬هـ ٨ جـ ٨ ب ٨ ¬د ٧ ¬هـ ٨ جـ ٨ ¬ب ٨ د ٧
¬هـ ٨ جـ ٨ ¬ب ٨ ¬د ٧ ¬د ٨ ب ٨ هـ ٨ جـ ٧ ¬د ٨ ب ٨ هـ ٨ ¬جـ.

أو وفق الترتيب الأبجدي:

ب ٨ جـ ٨ د ٨ ¬هـ ٧ ب ٨ جـ ٨ ¬د ٨ ¬هـ ٧ ¬ب ٨ جـ ٨ د ٨ ¬هـ ٧
¬ب ٨ جـ ٨ ¬د ٨ ¬هـ ٧ ب ٨ جـ ٨ ¬د ٨ هـ ٧ ب ٨ ¬جـ ٨ ¬د ٨ هـ

تصبح هذه الصيغة، بمجرد ترتيبها أبجديًا وتخليصها من التكرار، عبارة عن جدول صدقي: تمثل كل جملة من جملها إحدى طرق إسناد القيم الصدقية إلى الأحرف بحيث تجعل الصورة صادقة. ويتبدى اللزوم ملحوظًا للوهلة الأولى: إذا كانت أحرف صورتين قانونيتين فصليتين مُطوَّرتين متماثلتين، فإن الصورة الأولى تستلزم الصورة الثانية فقط في الحالة التي تظهر كل جملها من بين جمل الأخرى. وتتجلى علامة الصحة، في الصور القانونية الفصلية المُطوَّرة، في حضور كل الجمل الممكنة: ولتكن 2ن، حيث ن هو عدد الأحرف المختلفة. أمّا علامة عدم الاتساق فيكمن في الاختفاء عدم وجود الجمل.

لمحة تاريخية: يرجع اسم قانوني دي مورغان إلى اسم أوغست دي مورغان

(Augustus DeMorgan) الذي ساد ما بين 1846 و1864: غير أن ويليام دوكام (William of Ockham) كان يعرف هذين القانونين خمسة قرون قبل ذلك (انظر لوكازفيتش، «حول تاريخ منطق القضايا»). أمّا فكرة التطوير فتعود تسميتها إلى جورج بول (G.Boole) المعاصر لدي مورغان؛ وقد كانت الصورة القانونية الفصلية مألوفة لدى إرنست شرويدر(Ernest Schröder) حوالي 1877، وهي بلا شك أقدم من ذلك. عادة ما نسمّي هذه الصورة بشكل أقل إيحاء (disjuctive normal form).

تمارين

1. حول كل صورة من الصيغ التالية إلى صورة قانونية فصلية عبر إجراء تحويلات متتالية:

   ¬(ب ∨ ¬{جـ ∨ ¬[د ∨ ¬(جـ ∨ب)]})،

   ب ← جـ ∧ جـ ← د. ←. ب ← د،

   ب ← جـ. ← ب: ↔ ¬ب،

   ب ↔ جـ. ∧ جـ ↔ د،

   ب ↔ جـ. ↔ د،

   ب ∧ جـ. ↔ د.

2. حوِّل كل نتيجة من التمرين السابق إلى صورة قانونية فصلية متطورة.
3. تحقق مما إذا كان ذلك يشكّل طريقة عامة صحيحة للتحقق من تكافؤ الصور الصدقية القانونية الفصلية: قم بالبت عبر الفحص الانتقائي في ما إذا كانت كل جملة من كل صورة تستلزم الصيغة الأخرى. علِّل جوابك.
4. قم بالبت في لزومات التمارين 1-4 من الفصل السابع بواسطة منهج الصورة القانونية الفصلية المطوَّرة.

11 الاختزال

يمكن أن نعزز وضوح الصور القانونية الفصلية عبر الدفع بالاختزال إلى أبعد حد. عند الانتقال من (7) إلى (8) في الفصل السابق قمنا باستعمال إحدى صيغ الاختزال السبع التي عرضنا في (1) من الفصل التاسع، أي اختزال «ب ∧ ب» إلى «ب». غير أنه يُمكن أن نستعمل صيغًا أخرى أيضًا من بين الصيغ السبعة بشكل مفيد. مثلًا تلك التي تختزل «ب ∨ ب ∧ جـ» إلى «ب». وعليه عندما نختزل «¬هـ ∧ جـ ∨ ¬هـ ∧ جـ ∧ ب» إلى «¬هـ ∧ جـ» في (8) نحصل على:

(1) ¬ب ∧ ¬هـ ∨ ¬ب ∧ ¬جـ ∨ ¬هـ ∧ جـ ∨ ¬د ∧ ب ∧ هـ

تحتمل النتيجة (1) نفسها اختزالًا جديدًا لا تتضمنه أية صيغة من الصيغ السبع. إن الجملة الأولى لـ(1) نافلة؛ و(1) تكافؤ:

(2) ب ∧ ¬جـ ∨ ¬هـ ∧ جـ ∨ د ∧ ب ∧ هـ

توجد طريقة سريعة للتحقق مما إذا كانت إحدى جمل الصورة القانونية الفصلية قابلة للحذف على هذا النحو باعتبارها نافلة. يبين القانون (7) في الفصل التاسع كيف يتم ذلك: يكفي أن نتحقق بواسطة الفحص الانتقائي إن كانت الجملة المعنية تستلزم باقي الصيغة: نتوصل بواسطة الفحص الانتقائي إن كانت الجملة «¬ ب ∧ ¬هـ» من (1) تستلزم الجزء المتبقي من (1)، وهو ما يدل على أن «¬ ب ∧ ¬هـ» نافلة في (1).

لقد كانت الصورة (6) في الفصل السابق صورة قانونية فصلية. وكذلك حال (2) في هذا الفصل، ونرى أنها تُكافِئ (6). ويمكن أن يستمر الاختزال إلى أبعد حد.

يمكن أن نختزل أحيانًا صورة قانونية فصلية ليس بحذف جملة بأكملها، بل بحذف حرف فقط، وهو ما تم خلال الفصل السابق عندما انتقلنا من (7) إلى (8) بالاعتماد على (1) من الفصل التاسع. ويمكن أن ينتج ذلك أيضًا في حالات لا تتناول (1) من الفصل التاسع. وقد ضربنا مثلًا لذلك بالعبارة:

«ب ٨ جـ ٧ ب ٨ ¬جـ ٨ د ٧ ¬ب ٨ ¬جـ ٨ ¬هـ».

التي تبين أنها مكافئة لـ:

«ب ٨ جـ ٧ ب ٨ د ٧ ¬ب ٨ ¬جـ ٨ ¬د».

توجد طريقة سريعة للتحقق مما إذا كان يُمكن أن نحذف حرفًا قضويًا يظهر في جملة ما من صورة قانونية فصلية، باعتباره نافلًا. يكفي أن نلاحظ، بواسطة الفحص الانتقائي، ما إذا كان باقي الجملة يستلزم الصيغة برمتها. وعليه، لنأخذ: «ب ٨ جـ ٧ د ٧ ب ٨ ¬د ٧ ¬جـ ٨ ¬د». للتحقق من أن «د» نافل في «ب ٨ جـ ٨ د»، ينبغي أن نتحقق فقط من أن «ب ٨ جـ» تستلزم «ب ٨ جـ ٨ د ٧ ب ٨ ¬د ٧ ¬جـ٨¬د».

يُمكن تبيّن النجاعة الدائمة لهذه الطريقة من خلال تحليل المثال التالي: نود التحقق من أن «ب ٨ جـ ٨ د ٧ ب ٨ ¬د ٧ ¬جـ ٨ ¬د» تُكافئ «ب ٨ جـ ٧ ب٨ ¬د ٧ ¬جـ ٨ ¬د». ما تحققنا منه بواسطة الفحص الانتقائي هو أن «ب ٨ جـ» تستلزم «ب ٨ جـ ٧ ب ٨ ¬د ٧ ¬جـ ٨ ¬د»، وهذا يرقى إلى القول (بواسطة (7) من الفصل 9) بأن «ب ٨ جـ ٨ د ٧ ب ٨ ¬د ٧ ¬جـ ٨ ¬د» تُكافئ الفصل المركب «ب٨ جـ ٧ ب ٨ جـ ٨ د ٧ ب٨ ¬د ٧ ¬جـ٨¬د». غير أننا نختزل حينئذ الجملتين الأوليين لهذا الفصل إلى «ب ٨ جـ» (بواسطة «8»، الفصل 9) فنحصل على: «ب ٨ جـ ٧ ب ٨ ¬د ٧ ¬جـ ٨ ¬د».

قد نستفيد أحيانًا من حذف حرف مكرَّر بشكل مضاعف، من خلال توليد جملة مكرَّرة نستطيع أن نحذفها بدورها. هكذا، لننظر مجددًا في مثالنا السابق: «ب ٨ جـ ٨ د ٧ ب ٨ ¬د ٧ ¬جـ ٨ ¬د». نلاحظ بفضل ثلاث

عمليات فحص انتقائي أنه لا واحدة من جملها الثلاث مكررة. ومع ذلك، نجد أن الجزء المتبقي «ب ٨ جـ٧ ب ٨ ־د ٧ ־جـ٨ ־د»، بعد حذف «د» المكرر، يتضمن جملة مكررة على القارئ اكتشافها.

يتم فحص الصورة القانونية الفصلية سريعًا للتأكد من اتساقها، كما هو مذكور في الفصل السابق: تحذف كل جملة غير متسقة باعتبارها غير متسقة بشكل واضح. يعد التحقق من صحة الصور القانونية الفصلية أكثر صعوبة، لكن يتم توفيره الآن عن طريق حذف الأحرف المكررة. لذلك، لنتذكر اختبار تكرار الحرف الذي مفاده أن بقية جملته تستلزم الصيغة بأكملها. ولكن إذا كانت الصورة بأكملها صحيحة فعلًا، فإن أي شيء يستلزمها؛ لذلك فإن كل حرف سيحذف بواسطة اختبار التكرار إلى أن تتبقى لنا جمل تتكون من حرف واحد فقط. لن يكون الباقي صحيحًا فحسب، بل سيكون صحيحًا بشكل واضح: شيء من قبيل «ب ٧ ־جـ٧ جـ».

ينفتح أمامنا طريقان ناجعان لاختزال الصيغ الفصلية. بإمكاننا أن نتحقق، بواسطة عمليات الفحص الانتقائي، من تكرار جملة ما أو من تكرار حرف على حد سواء. بيد أنه من الممكن أن تستعصي صيغة قانونية فصلية على اختبارات التكرار، وتكون رغم ذلك قابلة للاختزال بواسطة طرق أكثر التواءً. مثال ذلك:

(3) ب ٨ ־جـ٧ ־ب ٨ جـ٧ جـ٨ ־د ٧ ־جـ٨ د

يمكن للقارئ أن يتحقق بواسطة الاثني عشر فحصًا انتقائيًا من تكرار كل جملة وكل حرف قضوي في (3)، ووضع فراغ في كل مرة. غير أن (3) تحوز مكافئًا أبسط: «ب ٨ ־جـ٧ ־ب ٨ د ٧ جـ٨ ־د».

إن الاختزالات التي تزوّدنا بها تقنية الفحص الانتقائي مفيدة دائمًا، حتى لو كُنّا نفتقد إلى ضمانة كوننا قد وجدنا أحد مكافئاتها الأكثر اختصارًا. يُمكن أن نغفل عمليات الاختزال الإضافية كما هو شأن اختزال (3) إلى

(ب ∧ ¬ج) ∨ (¬ب ∧ د) ∨ (ج ∧ ¬د)، أو نمضي إلى أبعد مدى في الفقرات الموالية.

تجدر الإشارة إلى أننا لا نعرف أيّة طريقة عامة وسريعة لاختزال صيغة قانونية فصلية إلى أحد مكافئاتها الأكثر اختصارًا. لذا علينا أن نستنفد كل الإمكانات. يُمكن تحديد مسار مناسب للإمكانات بواسطة الاعتبارات التالية: إن الصورة القانونية الفصلية عبارة عن فصل للجمل يستلزم كل واحد منها الصورة (ما دام أن «ب» تستلزم «ب∨ج»). من جهة أخرى، إذا قمنا بفحص وحذف الأحرف المكررة، فإننا سنتيقّن من أن كل جملة عبارة عن مُستلزِم أوّلي للصيغة: أعني إذا حذفنا حرفًا قضويًا معينًا من جملة ما، فإن الجزء المتبقي من هذه الجملة سيكفّ عن أن يستلزم الصيغة. وإذا تمكنا، بأي طريقة كانت، من ضم كل المُستلزِمات الأوّلية لصيغة معينة، فإننا سنكون على يقين من توفرنا على كل جمل أحد المكافئات القانونية الفصلية الأكثر اختصارًا لصورتنا. في أسوأ حالاتنا يُمكن أن نجرب التراكيب المختلفة للمستلزِمات الأولية، ثم نختار أحد الفصليات الأكثر اختصارًا، والتي تبدو مكافئة لصيغتنا الأصلية.

توجد طريقة آلية، تعود إلى سامسون وميلز (Samson and Mills)، لتوليد كل المستلزِمات الأولية لصيغة ما. ننطلق من صيغة قانونية فصلية تكون قد تخلصت من أحرفها المكررة. تكون هذه الصيغة عبارة عن فصل بعض مستلزِماتها الأولية. عندئذ إذا تعارضت جملتان من هذه الجمل بحرف واحد وواحد فقط، وليكن «ب» (بحيث تتضمن جملة ما «ب» والأخرى «¬ب»)، فإننا نأخذ وصل باقي عناصرها الحرفية. وهذا الوصل (مع حذف كل التكرارت) هو ما أسميه اتفاق الجملتين. مثال ذلك، تحوز الجملتان الأولى والثالثة من (3) على الاتفاق التالي: «ب ∧ ¬د»؛ وتحوز الثانية والرابعة الاتفاق: «¬ب ∧ د» من الممكن أن نبرهن على أنه بواسطة

إعمال عملية الاتفاق هذه سنظهر كل المستلزِمات الأولية التي تنقصنا[1].

هكذا، لكي نجد أحد المكافئات القانونية الأكثر اختصارًا لـ(3)، نبدأ بتوليد مستلزِمَيْها الأوليين الناقصين كما رأينا أعلاه ونقرنهما بـ(3) لنحصل على:

(4) ب ∧ ־جـ V ־ب ∧ جـ V جـ ∧ ־د V ־جـ ∧ د V ب ∧ ־د V ־ب ∧ د.

وهذه الصيغة لاتزال مكافئة لـ(3)، بموجب (7) من الفصل التاسع، لكنها مكافئ متكرر. نعلم أن هاتين الجملتين الأخيرتين قابلتان للحذف، غير أننا إذا اخترنا بالأحرى الاحتفاظ بإحديهما أو كلتيهما، فمن الممكن أن نتوصل إلى حذف جمل أخرى أكثر عددًا. وبذلك سنستخدم، على سبيل التجربة، عدة عمليات فحص انتقائي: سنكتشف، خلال إجرائنا هذه العمليات، ليس فقط أن «־ب ∧ جـ» تستلزم باقي (4) ويمكن أن تحذف نتيجة لذلك، بل إن « ־جـ ∧ د» تستلزم مجددًا ما تبقّى منها. نحصل أخيرًا على «ب ∧ ־جـ V ־ب ∧ د V جـ ∧ ־د» مُجوَّدة بشكل واضح مقارنة مع (3). توجد صيغة أخرى مختصرة أيضًا يُمكن أن نحصل عليها، قد يُحبّذ القارئ أن يبحث عنها.

لمحة تاريخية: لقد اهتمت الصناعة بمشكلة اختزال الصيغ الصدقية بغية تطبيقها في مجال المدارات الكهربائية. لنتصور حدّيْن نهائيّيْن، وقاطعي تيار وسيطيْن: فإذا كان قاطِعا التيار موضوعين بشكلٍ متوازٍ، فإن التيار سيمر فقط في الحالة التي يكون فيها أحد قاطعي التيار أو الآخر مغلقًا. أما إذا كانا مركَّبيْن بشكلٍ مُتسلسل، فإن التيار سيمر فقط في الحالة التي يكون فيها كلٌّ من القاطع الأول والثاني مُغلقيْن معًا. تلك هي بالتحديد أدوار الفصل والوصل: أمّا النفي، فإنه يطابق عكس قاطع التيار. ينتج عن ذلك،

(1) انظر كتابي:
W.Quine, *selected logic Papers*, pp. 166 sq.

كما لاحظ كلود شانون (Claude Shannon) سنة 1938، مطابقة بين المدارات والصور. ستمكّن تقنية ناجعة لاختزال صيغة إلى إحدى الصيغ المكافئة والأكثر بساطةً المهندِسَ مِنَ اختزالِ مدارٍ إلى أحد المدارات المكافئة الأكثر بساطةً. لقد كُنتُ إلى حدود أواخر عام 1948 أجهل مراوغة تقنية من هذا القبيل، حينما كنت أشتغل على هذا الكتاب آملًا تأسيس كل معالجتي لمنطق الدوال الصدقية على طريقة اختزال آلية سهلة. ظهر مقالي الأول حول هذه المسألة سنة 1952، حينئذ كان مُختبر الحساب في هارفاد قد ارتأى أنه يُستحسَن أن نحسب بالفعل وننشر المكافئات الأكثر بساطة لـ 536.65 دالة صدقية مكونة من أربعة أحرف مختلفة (انظر أيكن (Aiken)). وبما أن الآلات الأوتوماتيكية تتطلب مدارات معقدة، فقد ظهرت دراسات عديدة في صدد مسألة الاختزال في مجلّات متخصصة. وفي إحدى هذه المجلات نشر كل من سامسون وميلز سنة 1954 طريقة الاتفاق، كما أسمها، بغية الحصول على كل المستلزِمات الأولية كما هو الحال في (4). وفي مقال أخر من النوع نفسه، عرض غزالة (Ghazala) سنة 1957، وسيلةً لاختصار العمل المتبقي، أي اختيار الحد الأدنى المناسب من المستلزِمات الأولية كما هو الحال في: «ب ٨ ‒جـ ٧ ‒ب ٨ د ٧ جـ ٨ ‒د». خلال المدة الفاصلة، نبهني مهندس آخر يدعى رولف ك. موللر (Rolf K. Müller) سنة 1955، إلى أن الصعوبة التقنية الأساسية تكمُن في العدد الهائل من المستلزِمات الأولية، بالنسبة إلى حالة الصيغ التي تتوفر على أحرف مختلفة يتراوح عددها بين ستة واثني عشر. وقد ذكر فريدشال (Fridshal) صيغة من تسعة أحرف تحوز حسبه 1.698 مستلزِمات أولية. لقد قام بعض المهندسين ببرمجة بعض الحواسيب من أجل استكشاف اختزالات مثل هذه الصيغ، غير أنه حتى في هذه الحالة يُمكن أن تكون العملية ممتنعة، ستكون تقنية الاختزال التي لا تتطلب فحصًا تامًا للمستلزِمات الأولية عملًا مفيدًا حقًا. ⌊

تمارين

1. افحص تكافؤ (1) و(2) باعتماد التحليل الصدقي.
2. قم بالشيء نفسه بالنسبة إلى (3) والعبارة:

   «ب ∧ ¬جـ ∨ ¬ب ∧ د ∨ جـ ∧ ¬د».
3. ابحث في الصيغتين التاليتين عن الجمل والأحرف المتكررة:

   ب ∧ ¬جـ ∧ ¬د ∨ ¬ب ∧ جـ ∨ ب ∧ د ∨ جـ ∧ د.

   ب ∧ جـ ∨ ب ∧ ¬جـ ∧ د ∨ ¬ب ∧ ¬جـ ∧ ¬د.
4. قم بالأمر نفسه بالنسبة إلى الصور القانونية الفصلية الستّ التي حصلت عليها في التمرين 1 من الفصل العاشر.
5. [جد مكافئًا آخر لـ (4). يكون بالقدر نفسه من اختصار العبارة:

   ب ∧ ¬جـ ∨ ¬ب ∧ د ∨ جـ ∧ ¬د. وبيّن كل مرحلة.
6. جِد كل المستلزِمات الأولية للصيغ القانونية الفصلية الستّ التي حصلت عليها في التمرين 1 من الفصل العاشر. (ابدأ بحذف كل التكرارات التي كشفها التمرين 4).
7. جِد أحد المكافئات القانونية الفصلية الأكثر اختصارًا لكل واحدة من هذه الصيغ الستّ.]

12 التقابل

يقوم كل حساب منطقي للدوال الصدقية أساسًا على حساب «ص» و«ك». وبذلك بإمكاننا أن نتوقع أن تسلك صورتان بكيفية متوازية تمامًا، إذا كان تحليلهما الصدقي متماثلًا، ما عدا إذا أجرينا مبادلة شاملة بين «ص» و«ك». ونقول عن صيغتين مترابطتين بهذا الشكل متقابلتين في ما بينهما. يستجيب سلوكهما المتبادل لقوانين تستحق بعض الاهتمام، نظرًا لفائدتها النظرية وملاءمتها المحتملة.

برغم أن المتقابلات تتقابل على منوال «ص» و«ك»، فيجب ألّا نخلطها بالمتناقضات الخالصة أو بالمتنافيات. والمثال الأولي على التقابل يتجلّى، بالأحرى، في تقابل الوصل والفصل. فالوصل والفصل متماثلان بالفعل، ما عدا إذا أجرينا مبادلة شاملة بين «ص» و«ك»، بالمعنى الموالي. بداية، يُمكن أن نصف الوصل كالآتي:

المكون الأول	المكون الثاني	النتيجة
ص	ص	ص
ك	ص	ك
ص	ك	ك
ك	ك	ك

فإذا أجرينا مبادلة بين الصادات والكافات في العمود الأخير فقط، سينتج عن ذلك بالتأكيد دالة صدقية تمثّل نفيًا للوصل. فلنقم بمبادلة بين «ص»

و«ك» في كل واحد من الأعمدة الثلاثة. عندئذ سنحصل بالتحديد على وصف للفصل:

المكون الأول	المكون الثاني	النتيجة
ك	ك	ك
ص	ك	ص
ك	ص	ص
ص	ص	ص

وبهذا المعنى نقول عن «ب٨ج» و«ب٧ج» متقابلين. وعمومًا، تكون العلاقة بين صورتَيْ عا وعا′ تقابلية كالآتي: «متى أوّلنا كل واحد من الحروف «ب» و«ج»، إلخ، بشكل متقابل بالنسبة إلى عا وعا′، ينتج عن ذلك تقابل قيم صدق عا وعا′».

وطبقا لهذه القاعدة توجد نتيجة مبتذلة مفادها: لا تكون «¬ب» مقابلة لـ «ب»، بل لـ «¬ب» ذاتها: فإذا أسندنا بالفعل إلى «ب» قيما متقابلة نحصل على قيم صدقية لـ «¬ب» متقابلة في ما بينها.

بدلًا من قلب «ص» و«ك» بشكل فردي في جميع أنحاء الجدول، كما فعلنا أعلاه، يُمكننا الحصول على جدول مُكافِئ للتقابل من خلال ترك الأعمدة للمكونات سليمة والاقتصار على عكس العمود الناتج كله (بحيث تصبح «ص» العليا «ك» سفلى). يُمكن التحقق من ذلك في الحالة المذكورة أعلاه، ويمكن رؤيته خلال التفكير في العمل دائمًا. تتجلى علامة دالّة الصدقية للتقابل الذاتي، على وجه الخصوص، في أن عمود النتيجة يبدو هو نفسه مقلوبًا.

إن تقابل «ب٨ج» و«ب٧ج» بديهي من دون الرجوع إلى الجدولين أعلاه، إذ يكفي أن نقارن بين الوصفين الأصليين للوصل والفصل. فالوصل يصدق

إذا صدقت كل موصولاته ويكذب في ما عدا ذلك؛ في حين أن الفصل يكذب إذا كذبت كل مفصولاته ويصدق في ما عدا ذلك. إن الوصفين متماثلان، ما عدا بالنسبة إلى التبديل بين كلمتي «صادق» و«كاذب»؛ ومن ثم يضطر «ب٨ج» و«ب٧ج» للتصرّف بشكل متماثل ما عدا إذا أجرينا مبادلة شاملة لدوري «ص» و«ك». وهذا ما يعنيه التقابل بالتحديد. أما التقابل الذاتي لـ «¬ب» فبديهي بشكل مماثل وفق الوصف العام الذي مفاده: «أن النفي يصدُق أو يكذبُ بحسب ما إذا كذبَ مكوِّنُه أو صدق»: لنبدل الألفاظ «صادق» و«كاذب» بالفعل في هذا الوصف، سنحصل ببساطة مرة أخرى، على وصف للنفي.

وعمومًا، هب أن لدينا العبارة عا مكوَّنة من أحرف بواسطة النفي والوصل والفصل فقط (وبالتالي خالية من الرابطين «←» و«↔»)، وهب أن لدينا عبارة ثانية عا′ مماثلة لـ عا، ما عدا أن الفصل فيها يحلّ محلّ الوصل أينما ظهر في عا، والعكس بالعكس. من اللازم أن تتطابق التحليلات الصدقية لـ عا وعا′ ما عدا إذا حصل تبادل تام بين «ص» و«ك»: وذلك لأنَّ تفسيرات الوصل والفصل، كما رأينا بوضوح، متماثلة ما عدا في حالة تبديل «صادق» بـ «كاذب»، ويظل تفسير النفي ثابتًا أيضًا خلال تبديلنا «صادق» بـ «كاذب». وبذلك تكون عا وعا′ متقابلتين.

ويشكل ما وضعناه توًا **القانون الأول للتقابل**: إذا كانت عا صيغة صدقية خالية من «←» و«↔»؛ وقمنا بتبديل الفصل بالوصل والعكس بالعكس، في كل مواضع عا، فإن النتيجة تكون مقابلاً لـ عا. يثبت هذا القانون مباشرة تقابل «ب ٨ جـ» و«ب٧ جـ»، وكذا التقابل الذاتي لكل من «¬ب» و«ب». كما يثبت أيضًا، تقابل «ب ٨. جـ ٧ ¬د» و«¬ب ٧ جـ ٨ ¬د»، وتقابل «ب ٨ ¬جـ ٧ ¬ب ٨ د» و«ب ٧ ¬جـ ٨. ¬ب ٧ د»، وتقابل «ب ٨ جـ ٧ جـ ٨ د ٧ ب ٨ د»، و«ب ٧ جـ ٨. جـ ٧ د ٨. ب ٧ د» إلخ.

هكذا أضحينا نتوفر على وسيلة تصويرية سريعة لصياغة تقابل صيغة ما: مبادلة الوصل والفصل. وتجدر الإشارة إلى أن هذه العملية تفترض، غياب «←» وكذا «↔»: بل نستطيع أن نحذفهما مسبقًا، ما دام أنه من الممكن أن نحوّل «ب ← جـ» إلى «¬ب ٧ جـ»، ونحوّل «ب ↔ جـ» إلى «¬ب ٧ جـ٨. ¬جـ ٧ ب» أو «ب ٨ جـ ٧ ¬ب ٨ ¬جـ».

عند مبادلة الوصل والفصل للحصول على المتقابلات، يجب أن نولي اهتمامًا خاصًا للحفاظ على التراكيب. وفي حالة الشك، نعمد إلى وضع كل الأقواس بدل النقط المتفق عليها. وهكذا لا تكون «ب ٨ .جـ ٧ د» مقابلة لـ «ب ٧ جـ ٨ .د»، بل لـ «ب ٧ جـ ٨ د». ذلك أن «ب ٨. جـ ٧ د» تعني «ب ٨ (جـ ٧ د)»، و«ب ٧ جـ ٨ د» تعني «ب ٧ (جـ ٨ د)»، وهما تعبيران يتم الحفاظ فيهما على نمط التركيب نفسه؛ في حين أن «ب ٧ جـ٨. د»، تعني، «(ب ٧ جـ) ٨ د»، ومقابلة بالأحرى لـ «ب ٨ جـ ٧ د».

هب أنَّ لدينا صيغتين عا وعا′، فإننا نستطيع التحقق مما إذا كانت عا′ مقابلة لـ عا عبر صياغة مقابل صريح لـ عا بواسطة الطريقة السالفة الذكر، ثم التحقق من مكافئتها لـ عا′. ونستطيع بالخصوص التحقق بواسطة هذه الطريقة مما إذا كانت صيغة معينة عا مقابلة لنفسها: يكفينا أن نصوغ المقابل الصريح لـ عا بمبادلة الوصل والفصل، كما بيّنا ذلك، ثم التحقق من تكافؤ هذه النتيجة مع عا. إذا تركنا جانبًا الحالات المبتذلة مثل «¬ب»، يكون التقابل الذاتي نادرًا؛ ومع ذلك يرد. فمثلًا «ب ٨ جـ ٧ ب٨ د ٧ جـ ٨ د» مقابلة لذاتها، لأنها مكافئة لمقابلها الصريح «ب ٧ جـ٨. ب ٧ د ٨. جـ ٧ د» (انظر الفصل التاسع، التمرين 4).

ليس استبدال الفصل بالوصل الوسيلة الوحيدة الملائمة لصياغة التقابل. إذ توجد طريقة أخرى لا تتطلب الحذف المسبق لـ «←» و«↔»، نحصل عليها بواسطة القانون الثاني للتقابل: إذا قمنا بنفي كل أحرف

عبارة ما وكذا العبارة برمتها، فإننا نحصل على مقابلها. وهذا القانون بديهي بالنظر إلى التعريف الأصلي للتقابل، لأنَّ نفي الأحرف القضوية له المفعول نفسه الذي يكون لقلب كل تأويلاتها، كما أن نفي العبارة برمتها يقلب القيمة الصدقية للنتيجة.

يُعتبَر قانونا دي مورغان نفسهما (الفصل 10) بالأساس مبادئ للتقابل، كما يُمكن أن نلحظ ذلك عندما نقوم بإعادة فحصهما في هذا السياق. فالقانون الأول للتقابل يعيّن «ب ∨ ج ... ∨ هـ» كمقابل لـ «ب ∧ ج ∧... ∧ هـ»، في حين يعين القانون الثاني بالأحرى «¬(¬ب ∧ ¬ج ∧ ... ∧ ¬هـ)»، وهما الصيغتان التي يفترض أن تكونا متُكافِئتين، مما يجعل القانون الأول لدى مورغان، كما هو مبين في (1) من الفصل العاشر، صحيحًا. ويسري استدلال موازٍ على (2).

يوجد قانون ثالث للتقابل مفاده: تكون صيغة ما صحيحة إذا وفقط إذا كانت مقابلتها متناقضة. مناط ذلك، إذا كان تحليلان صدقيان يتباينان بالنظر إلى مبادلة تامة بين «ص» و«ك»، فمن الواضح أن أحدهما سيكون صحيحا إذا وفقط إذا تبين أن الثاني متناقض.

القانون الرابع للتقابل: تستلزم الصورة عا$_1$ الصورة عا$_2$ إذا وفقط إذا كان مقابل عا$_2$ يستلزم مقابل عا$_1$. وهو ما يتبين مما يلي: يسلك مقابلي عا$_1$ وعا$_2$ مثل عا$_1$ وعا$_2$ عندما يخضعان للتحليل الصدقي، ما عدا بالنسبة إلى تبديل «صادق» بـ «كاذب» في جميع المواضع. وبذلك، إنَّ قوْلَنا لا يوجد تأويل للحروف يجعل عا$_1$ صادقة وعا$_2$ كاذبة يماثل القول بعدم وجود تأويل يجعل مقابل عا$_1$ كاذبًا ومقابل عا$_2$ صادقًا.

القانون الخامس للتقابل: تكون الصيغ متُكافِئة إذا وفقط إذا كانت مقابلاتها متُكافِئة. ويشتق هذا القانون من سابقه بما أن التكافؤ (التلازم) هو اللزوم المتبادل.

يمكّننا القانون الثالث والرابع والخامس، بعد إثبات الصحة، أو التناقض، أو اللزوم، أو التكافؤ (التلازم) بواسطة التحليل الصدقي أو غيره، من استنتاج تناقض إضافي أو صحة أو لزوم أو تلازم من دون اعتماد تحليل آخر. فمثلاً، بعد أن نتحقق من كون «ب V ⌐جـ .٨ جـ V ⌐د .٨ د V هـ» تستلزم «ب V هـ» (على منوال طريقة الفحص الانتقائي، الفصل السابع)، نستطيع أن نستنتج، بموجب القانون الرابع للتقابل أن «ب ٨ هـ» تستلزم «ب ٨ ⌐جـ V جـ ٨ ⌐د V د ٨ هـ». ولكي نميّز هذه الطريقة عن سابقتها، يُمكن أن نسميها عملية **المبادلة الكاملة**.

يشتق كل واحد من قانوني دي مورغان، (1) و(2) من الفصل العاشر، من الآخَر طبقًا للقانون الخامس للتقابل. علاوة على ذلك، نستطيع أن نستنتج، انطلاقًا من قانون توزيع الوصل على الفصل (الفصل العاشر)، وبواسطة القانون الخامس للتقابل، **قانون توزيع الفصل على الوصل** التالي:

«ب V جـ ٨ د ٨ ... ٨ ط» تُكافِئ «ب V جـ .٨ ب V د ٨. ... ٨. ب V ط»

يُبيّن هذا القانون أنّ العلاقات بين الوصل والفصل أكثر التحامًا مما هي عليه بين الضرب والجمع. ففي الحساب، يُمكن أن نُطوّر الضرب التالي:

سـ (ع + صـ +...+ ن) = سـ ع + سـ صـ +....+ سـ ن،

لكننا لا نستطيع القيام بـ «الجمع» كالتالي:

س + ع صـ ... ن = (سـ + ع) (س+ صـ) ... (س + ن).

لكن عندما يتعلق الأمر بالوصل والفصل، يصح التوزيع في الاتجاهين معًا.

وحيث إنّ كل التكافؤات تظل، طبقًا للقانون الخامس للتقابل، صحيحة عندما نبادل الوصل والفصل، بإمكاننا أن نستنتج مباشرة أن التقنية التي تسمح باختزال صورة صدقية ما إلى صورة قانونية يُمكن إعادة إنتاجها كليّةً من خلال مبادلة الوصل والفصل. وهكذا، نحصل على صور قانونية وصلية من قبيل:

ب ∨ ¬جـ ∨ د ∧. ¬ب ∨ هـ ∧ جـ ∨ ¬د ∨ هـ

أي إلى صيغ وصلية لعبارات فصلية. إنَّ جمل الصورة القانونية الوصلية صيغ فصلية وليست وصلية: والصورة عبارة عن وصل لجملها.

ووفقًا للتقابُل، فإنَّ كل عملية تسمح باختزال الصور القانونية الفصلية يكون لها موازٍ تام في الصور القانونية الوصلية. وخصوصًا، مثلما أن كل جملة غير متسقة من قبيل «¬جـ ∧ هـ ∧ جـ» تُحذف من الصورة القانونية الفصلية (ما دامت تظل جملة، على الأقل، قائمة)، فإن كل جملة صحيحة من صنف «¬جـ ∨ هـ ∨ جـ» تُحذف من الصورة القانونية الوصلية.

أشرنا في الفصل العاشر إلى أن الصورة القانونية الفصلية تزوّدنا باختبار مباشر للتناقض. والصورة القانونية الوصلية تزوّدنا باختبار الصحة المقابلة: يكفي أن نختزل بحذف الجمل الصحيحة بالأسلوب أعلاه، ثم نرى ما إذا لم يتبقَّ لنا سوى جملة وحيدة ظاهرة الصحة.

بالموازاة مع الصورة القانونية الفصلية المطوَّرة التي واجهتنا في الفصل العاشر، يضمن التقابل صيغة قانونية وصليّة مُطوّرة. وهنا تكون العملية الملائمة للتطوير هي تلك التي تحوِّل «ب» إلى «ب ∨ جـ ∧. ب ∨ ¬جـ»، وتكون للصورة القانونية الوصلية «هـ ∨ ب ∧. ¬د ∨ هـ» الصورة القانونية المطوّرة:

ب ∨ جـ ∨ د ∨ ¬هـ ∧. ب ∨ جـ ∨ ¬د ∨ ¬هـ ∧. ¬ب ∨ جـ ∨ د ∨ ¬هـ ∧.

¬ب ∨ جـ ∨ ¬د ∨ ¬هـ ∧. ب ∨ جـ ∨ ¬د ∨ هـ ∧. ب ∨ ¬جـ ∨ ¬د ∨ هـ.

إنه المقابل للصيغة التي رأينا في نهاية الفصل العاشر. أما بالنسبة إلى الصيغتين القانونيتين الوصليتين المطورتين اللتين لهما الأحرف القضوية نفسها، فيكون اختبار اللزوم عكس ما كان عليه الأمر بالنسبة إلى الصور القانونية الفصلية المطورة: فكل جمل الصيغة المُستلزَمة تكون من بين جمل الصيغة المُستلزِمة. وتكون علامة التناقض في صيغة قانونية وصلية مطورة هي حضور 2^n من الجمل الممكنة، وتكون علامة الصحة هي غيابها.

كلمة تحذير ختامية: إن الأشكال الفصلية والوصلية للصورة ليست عادة متقابلات لبعضها البعض. إن المتقابلات، في نهاية المطاف، ليست متُكافِئة، إلا في حالة التقابل الذاتي.

لمحة تاريخية: يوجد أساس التقابل في قوانين دي مورغان التي تعود، كما رأينا، إلى ما قبل ست قرون مع وليام أوكام. أمّا المعالجة المقصودة للتقابل فترجع إلى شرويدر (1877).

تمارين

1. أي الصيغ الآتية:

ب ↔ جـ   ب ↔ ⌐جـ،   ⌐ب ↔ جـ،   ⌐(ب ↔ جـ)

توجد بينها علاقة تقابل؟ علِّل جوابك.

2. اكتب مقابلات العبارات التالية:

ب ← جـ   جـ ← ب،   ⌐ (ب ← جـ)،   ⌐ (جـ ← ب).

3. لقد رأينا في الفصل الحادي عشر اختبارًا لتكرار الجملة أو الحرف في صورة قانونية فصلية. ما الذي ينبغي أن تكون عليه اختبارات التكرار، إذا أخذنا بعين الاعتبار مقتضيات التقابل، بالنسبة إلى جملة أو حرف قضوي لصورة قانونية وصلية؟
4. حوّل، بواسطة تحويلات متتالية، كل صورة من صور التمرين (1) في الفصل العاشر إلى صيغة قانونية وصلية. اختصر حيثُما أمكنَكَ ذلك.
5. عبِّر عن نتائج التمرين (4) بصيغة قانونية وصلية متطورة.
6. تحقَّقْ من صحة الصيغ الأربع للتمرين (1) من الفصل السادس عبر التعبير عنها بصيغة قانونية وصلية.

13 المسلَّمات

يتم تطبيق المنطق أحيانًا على بعض النظريات العلمية، مثل علم الحساب أو أحد فروع الفيزياء، بشكل صريح عبر إعمال ما نُسمّيه نسق المسلَّمات، نطلق اسم المسلَّمات على بعض العبارات النظرية باعتبارها منطلقًا، ثم نشتقُّ منها عبارات أخرى تمسى المبرهنات، عندما نُبرهِن على كونها تلزم منطقيًّا عن هذه المسلَّمات. يتجاوز اللزوم المعني هنا اللزوم الذي عرضناه إلى حد الآن، أي اللزوم الصدقي، إذ يعتمد معطيات منطقية جد متقدمة سنتناولها في أبواب لاحقة من هذا الكتاب.

غالبًا ما استُعمل ضرب من المنهج التسليمي (الأكسيومي) في مجال المنطق نفسه، بما في ذلك منطق الدوال الصدقية، لتوليد صيغ صحيحة. وفي هذه الحالة لا يُمكن لعلاقة التوليد أن تعتبر ببساطة كعلاقة لزوم لأن اللزوم هنا واسع الانتشار: تلزم كل صورة صحيحة عن أية صورة وعن كل صورة. وعليه سنقدم، عوضًا عنه، قواعد الاستدلال الصورية والخاصة. ومن بين هذه القواعد نجد عادة **قاعدة الوضع بالوضع** التي مفادها: إذا كانت مبرهنة ما (أو مُسلَّمة، تعتبر المسلَّمات بمثابة مبرهنات) عبارة شرطية مقدمها هو الآخر مبرهنة، فإننا سنعتبر تاليها مبرهنة أيضا. هناك قاعدة أخرى معروفة **بقاعدة الإنابة** مفادها: يُمكننا أن نستبدل أية صورة في كل مواقع الحرف القضوي من المبرهنة. إذا انطلقنا من مسلَّمات صحيحة، فمن البديهي أن هاتين القاعدتين ستقودان إلى مبرهنات صحيحة.

هناك اختبارمهم، يعود إلى لوكازفيتش، يضم المسلّمات الثلاث الآتية:

(1) ب ← جـ ←: جـ ← د .←. ب ← د،

(2) ب ←. ¬ب ← ج،

(3) ¬ب ← ب . ← ب.

لنشتق بعض المبرهنات بإعمال القاعدتين، يؤدي استبدال «ب» بـ «جـ» في (2) إلى:

(4) ب ←. ¬ب ← ب.

ويؤدي استبدال «ب» بـ «د» في (1) إلى:

(5) ب ← جـ.←: جـ ← ب .←. ب ← ب.

ويؤدي استبدال «¬ب←ب» بـ «جـ» في (5) إلى:

(6) ب ← ¬ب ← ب :←:. ¬ب ← ب .← ب :←. ب ← ب.

ونحصل بتطبيق قانون الوضع بالوضع على (6) و(4) على:

(7) ¬ب ← ب .← ب :←. ب ← ب.

ويؤدي تطبيق قانون الوضع بالوضع على (7) و(3) إلى:

(8) ب ← ب.

تسمّى هذه المتوالية من الخطوات ببرهان «ب ← ب». ويمكن كتابة مجموع البرهان بترميز مختزل على النحو الآتي:

بواسطة (1)، [2 (جـ/ب) ←: 3 ←.] ب ← ب.

يمثل الرقم «3» هنا، على سبيل الاختزال الصيغة (3)، أي «¬ب ← ب .← ب»؛ وتمثل العبارة «2 (جـ/ب)» الصورة (4)، أي ما ستصبح عليه (2) عندما نستبدل «ب» بـ «جـ». أما باقي الرموز فتُكافِئ (6). فذكر (1) يعني أن مجموع الصورة (6) يُمكن الحصول عليه انطلاقًا من (1) بواسطة بعض الإنابات. ينبغي للقارئ الذي كان يُعرض عليه ببساطة هذا البرهان المختصر أن يجد (6) ويقارن بِنيتَها ببنيةِ (1)، وأن يكتشف من تلقاء نفسه أن «¬ب ← ب»

و«ب» كانتا إنابتيْن مطلوبتيْن لـ «ج» و«د» في (1). وأخيرًا يدلّ المعقوفان على التفريق بواسطة قانون الوضع بالوضع، مرتين في هذه الحالة.

يتناول هذا النسق، كما هو واضح، النفي والشرط فقط، وإن كانت كل صورة صدقية يُمكنها أن تُترجَم، إلى رموزٍ من هذا القبيل، بما أن «ب V ج» و«ب ∧ ج» يكافئان «¬ب ← ج» و«¬ (ب ← ¬ج)». يوجد برهان آخر يفيد أن كل صورة صدقية صحيحة، أو ترجمتها، يُمكن الحصول عليها انطلاقًا من المسلَّمات (1)– (3) بواسطة القاعدتين. وبهذا المعنى يكون النسق تاما.

يحرص ذوو التوجه الأكسيومي بالطبع على كون مسلَّماتهم مستقلة، أي ألّا تكون أي واحدة من المسلَّمات قابلة للاشتقاق من الأخريات باعتبارها مبرهنة، وبالتالي تكون غير ضرورية. تظهر استقلالية مُسلَّمة ما بوضوح كلما أمكننا أن نعيد تأويل الرموز بحيث نكذب هذه المُسلَّمة مع الحفاظ على صحة باقي المسلَّمات وسلامة قواعد الاستدلال. نستطيع أن نبين، على سبيل المثال، أن المُسلَّمة (3) مستقلة في هذا النسق من خلال إعادة تأويل علامة النفي باعتبارها تنتج الكذب فقط حيثما طبِّقت. ونحافظ على تأويل «←». ينتج عن ذلك أن قاعدتي الوضع والإنابة تظلان صحيحتين كما تظل (1) صحيحة. ويظهر أن (2) من جهتها صحيحة أيضا؛ لأنه إذا كانت «¬ب» كاذبة دائمًا، فإن «¬ب ← ج» تصدق دائمًا. في حين تصبح (3) التي أعيد تأويلها على هذا النحو كاذبة لأن «ب» كاذبة.

لنبين مجدّدا استقلالية (2) نعيد تأويل علامة النفي كما لو كانت تُنتِج الصدق حيثما طُبِّقت.

تمت بلورة أنساق تامة أخرى من المسلَّمات المستقلة بالنسبة إلى منطق الدوال الصدقية لا تتأسس كلها على النفي والشرط. إذ بعضها يستعمل النفي والفصل. يستعمل أحد هذه الأنساق، والذي يعود إلى نيكود (Nicod)

طوره لوكازفيتش، الرابط الصدقي الوحيد « | » الذي يكفي، كما سلف الذكر (في الفصل الثاني)، للتعبير عن كل الدوال الصدقية؛ وهو نسق لا يتضمن سوى مُسلَّمة واحدة هي:

ب | .جـ | د: | ::هـ | .هـ | هـ: | :.هـ | جـ | :ب | هـ. | . ب | هـ

إن قواعد الاستدلال عبارة عن إنابة وضرب من قانون الوضع بالوضع مفاده أنه إذا كانت للمبرهنة الصيغة «با | .جا. | عا» وكانت تتضمن مبرهنة في مكان «با»، فإن الصيغة التي تكون في مكان عا مبرهنة. إذا عرفنا «ب← جـ» بكونها «ب | .جـ | جـ»، فإنَّ المُسلَّمة السابقة تصبح أقل إرباكًا:

ب | .جـ | د: | :.هـ ← هـ | :هـ | جـ. ←. ب | هـ

إن المنطق الأكسيومي شيء، وتطبيق المنطق في أوج ازدهاره على مسلَّمات خارج المنطق شيء آخر. والتباين بينهما هو التضاد القائم بين ما سمَّاه شيفر الأنساق المؤسِّسة والأنساق ما بعد المؤسِّسة؛ فالأنساق المؤسِّسة لها قواعد استدلالية مستقلة. أما الأنساق ما بعد المؤسِّسة فتقتصر على اشتقاق مبرهناتها انطلاقًا من مسلَّماتها بواسطة اللزوم المنطقي، وتلجأ إلى المنطق من أجل تحليل وتقنية هذه العلاقة.

غير أنه يحتمل أن تُدقَّق هذه الأنساق المؤسِّسة في مجالات خارج المنطق. مثال ذلك البناء الأكسيومي لعملية الطرح في الجبر[1]. توجد مسلَّمتان:

سـ= سـ - (عـ - عـ)، سـ- (عـ - هـ) = هـ - (عـ - سـ).

مرة أخرى نجد أن الإنابة هي أحد قواعد الاستدلال، وتمكننا قاعدة استدلال ثانية من وضع الجهة اليمنى من المبرهنة مكان الجهة اليسرى في كل مبرهنة. فالإنابة المُطبَّقة على المُسلَّمة الثانية، على سبيل المثال، تنتج المبرهنة الآتية:

---

(1) مقتطف من كتابي:

Selected Logic papers, pp. 54-60.

هـ - (سـ - (عـ - ع)) = (عـ - ع) - (سـ - هـ).

ونحصل، انطلاقًا من هذه المبرهة ومن المُسلَّمة الأولى وبإعمال القاعدة الثانية للاستدلال، على المبرهنة التالية:

هـ - سـ = (عـ - ع) - (سـ - هـ).

هناك مثال آخر أكثر غرابة مفاده: تسمح لنا القاعدة الثانية بوضع الجهة اليمنى «سـ» للمُسلَّمة الأولى مكان الجهة اليسرى من هذه المُسلَّمة نفسها؛ فنحصل على المبرهنة «سـ = سـ».

بيد أنه بإمكاننا أن نحصل على المزيد، إذ نستطيع البرهنة على أن النسق تام، بالمعنى التالي: كل معادلة مبينة باعتماد هذا الترميز بالنسبة إلى عملية الطرح وتكون صحيحة، أو صادقة بالنسبة إلى كل قيم متغيراتها، تكون قابلة للاشتقاق من المسلَّمتين بواسطة القاعدتين. علاوة على أن الترميز أقوى مما تبدو عليه؛ إذ يُمكن التعبير عن سـ + عـ فيها بواسطة الصيغة سـ - ((عـ - ع) - ع).

غير أنه عادة ما تكون عمليات البناء الأكسيومي للمواضيع الخارجة عن المنطق ما بعد مؤسَّسة. مناط ذلك سبب وجيه: الإنتاج العميم. إننا نطور مرة واحدة كل التقنيات المنطقية التي تستهدف وضع اللزوم، ثم بعد ذلك نستعملها لاشتقاق المبرهنات من المسلَّمات في الأنساق ما بعد المؤسَّسة المتعلقة بأي موضوع.

في المقابل يكون نسق المسلَّمات بالنسبة إلى المنطق نسقًا مؤسَّسا بالضرورة. وأود أن أشير مرة أخرى في الختام إلى أن قيمته مشكوك فيها، خصوصًا في منطق الدوال الصدقية. يحظى هذا المجال، قبل كل شيء، بمزية طريقة البتّ في الصحة، أي على اختبار آلي: يزودنا التحليل الصدقي بمثل هذا اختبار للصحة؛ كما توفر الجداول الصدقية اختبارًا آخر، ويمنحنا التحويل إلى صيغة قانونية وصلية اختبارا ثالثا. ولأننا محظوظون

بهذه الأنواع من الاختبارات، فسنكون غير كيّسين إذا أعملنا الطريقة الأكسيومية في هذا المجال. إنها أخس لأنها لا تُزوّدنا بأي طريقة عامة لتحصيل الحكم بعدم الصحة: قد يدلّ الفشل في اكتشاف برهان على صورة ما إما على عدم الصحة وإمّا ببساطة على غياب الحظ.

لقد كان لوكازفيتش يوصي بالمنطق الأكسيومي للدوال الصدقية كأساس للتمرّن على المنهج الأكسيومي بغية تطبيقه في مجالات أكثر ضرورة. أما أنا فأوصي، بالأحرى، بأن يكون لكل يوم عمله الخاص. إن المنطق المبني أكسيوميًا، بصوره وقواعده الاستدلالية الخاصة، مختلف تمامًا عن الأنساق ما بعد المؤسِّسة المبنية أكسيوميًا، لذا من الأفضل أن نتمرّن إنْ شِئنا على هذه الأخيرة كما هي. والأهم في هذا التمرُّن يكمُن في التعرف على اللزوم أو البرهنة عليه ما دام اللزوم هو ما يربط مسلَّمات الأنساق ما بعد المؤسِّسة بالمبرهنات، ومثل هذا التمرُّن يُمثّل حقًّا الهدف الأساسي لهذا الكتاب. سنولي اهتمامًا بالمسلَّمات ما بعد المؤسِّسة في الفصلين 42 و48، وإلى ذلك الحين، فقد أدرجت هذا التقرير المقتضب عن البناء الأكسيومي لمنطق الدوال الصدقية لإبراز التباين من ناحية، ومن ناحية أخرى بسبب أهمية هذا المشكل في الأدبيات السابقة.

لمحة تاريخية: كان فريغه (Frege) أول من قام سنة 1879 بالبناء الأكسيومي لمنطق الدوال الصدقية، وبوضع قواعد الاستدلال الصورية. وقد أنشأ فريغه نسقه، مثل نسق لوكازفيتش (1)-(3)، باعتماد النفي والشرط، وكانت قاعدتاه هما الوضع والإنابة؛ غير أن المسلَّمات كانت مُرهِقة أكثر، ولم تكن قاعدة الإنابة مصوغة بكيفية صريحة. وقد صاغ وايتهيد وراسل نسقهما سنة 1910 باعتماد النفي والفصل. ويعود نسق

لوكازفيتش إلى 1929[1]، أما مُسلَّمة نيكود– لوكازفيتش فتعود إلى 1917 و1931. وقد استمر المنهج الأكسيومي في اجتياح منطق الدوال الصدقية خلال ثلاثينيات [القرن العشرين]، ويوجد عدد من الأنساق قيد الطبع. ويرجع أول برهان على تمام نسق من هذا النوع إلى بوست في سنة 1921[2].

تمارين

1. برهن على «¬ب ← ب. ←. ¬ب ← ج» انطلاقًا من (1)-(3) مستعملًا الترميز المكثَّف للبراهين.
2. بيّن بالتفصيل استقلالية (2).
3. برهن في نسق نيكود-لوكازفيتش على:

ط | :ص | .ص | ص.: | ::ب | .ج | ش: | ط.: | :.ب | .ج | ش: | ط

(التي تقول «ط | .ص ← ص: ←:. ب | .ج | ش: | ط» إذا عرفنا «←» كما فعلنا من قبل).⌊

(1) انظر كتاب ألفريد تارسكي (A. Tarski):
Logic, Semantic, Metamthematics, p. 43.

(2) للاطلاع على صيغة مختصرة جدًا لبرهان التمام انظر كتابي:
Selected Logic papers, pp. 159-163.

الباب الثاني

الحدود الكليّة والأسوار

14 العبارات الحملية

كثيرة هي الاستدلالات البسيطة والصحيحة منطقيًا في الوقت نفسه، والتي لا تلائمها التقنيات المنطقية السابقة، من قبيل:

لا واحد من الفلاسفة شرير	نعبر عنها رمزيًا	لا واحد من ل هي م
بعض اليونانيين فلاسفة		بعض ك هي ل
إذًا بعض اليونانيين ليسوا أشرارًا		∴ بعض ك ليسوا م

نشير هنا إلى أن «ك» و«ل» و«م» لا ترمز إلى العبارات، كما هو حال «ب» و«ج» في الباب الأول، بل إلى أسماء مشتركة، أو بلغة منطقية، إلى الحدود الكلية[1]. وسواء اعتبرنا هذه الأسماء منعوتًا أو نعتًا فإن المسألة تعبيرية بلا أهمية. ففي المثال السابق، تظهر «ك» كمنعوت، أي «الفلاسفة»، و«ل» كصفة، أي «شرير»؛ ومع ذلك، نستطيع أن نعيد كتابة الصفة، لو شئنا، فنجعلها منعوتًا، «الأشرار أناس». وبالمنوال نفسه، نستطيع أن نعامل الأفعال اللازمة باعتبارها حدودًا، فنعتبر مثلًا العبارة «بعض الأسماك تطير» حالة من حالات «بعض ك هي ل»؛ لأن الفرق بين «بعض الأسماك تطير» و«بعض الأسماك كائنات طائرة»: مسألة ترميز خالصة. قد تكون الأسماء أو الأفعال التي تقوم مقام الحدود، بالطبع، عبارات مركبة من قبيل «مستخدم طوال عشرة أعوام في شركة الطاقة الشمسية»، و«يرتدون في أنوفهم خواتم من نحاس»، إلخ. كما أن اعتبار هذه الحدود في صيغة المفرد

(1) ما نعتبره في هذه الصفحات حدودًا كلية أو مجرد حدود يُمكن أن يعيّن، حسب التطورات الواردة في البابين الثالث والرابع، بدقة أكبر الحدود الكلية الواحدية.

أو الجمع ليس سوى مسألة تعبير لا أهمية لها من الناحية المنطقية أيضًا: وبذلك لا حاجة للتمييز بين «لا فيلسوف شرير» و«لا يكون الفلاسفة أشرارًا أبدًا»: وبين «كل الفلاسفة حكماء» و«كل فيلسوف حكيم». بل لا حاجة للتمييز أيضًا بين «يوجد يوناني فيلسوف» و«بعض اليونانيين فلاسفة»، شريطة أن نفهم، كما نفعل هنا، أن «بعض» تعني «على الأقل واحد».

لكن، كيفما كانت المرونة التي تسند إلى مفهوم الحد، فمن الواضح أن الحدود ليست، على الإطلاق، عبارات: وهو ما يفسر لماذا لا تتلاءم التقنية الواردة في الباب الأول مع الاستدلال المعروض أعلاه. فقد عالجنا في الباب الأول بنيات العبارات المركبة بالنظر إلى العبارات المكوِّنة لها فقط؛ وتظل العبارات أصغر وحدات للتحليل. والآن، في الباب الثاني فقط، سنتناول تحليل العبارات المكوِّنة بدورها إلى أجزائها الصغرى، التي ليست عبارات، بل حدود تتكون منها. تتوقف صحة الاستدلالات المنطقية الصحيحة على بنى العبارات المعنية، غير أن البنى ذات الصلة يُمكن أن تكون إما البنى الخارجية التي درسناها في الباب الأول، وإما البنى التحتية الأكثر دقة التي سنوجه إليها الآن عنايتنا. والمثل الذي ضربناه أعلاه يتوقف، بالتحديد، على هذا النوع الأخير من البنى.

تتميز العبارة بكونها تحتمل الصدق والكذب، ويتميز الحد، من جهته، بكونه يصدق على مواضيع كثيرة، أو على واحد منها، أو على لا واحد، ويكذب في ما عدا ذلك. فالحد «يوناني» يصدق على كل يوناني، والحد «شرير» يصدق على كل شخص شرير، ولا شيء غيره. والحد «كوكب طبيعي للأرض»، يصدق على كل كوكب طبيعي للأرض، ولاشيء غيره، وبذلك يصدق على موضوع وحيد هو القمر. ويصدق حد «الغول» على كل غول ولاشيء غيره، وبالتالي لا يصدق على شيء، لأن الغول لا يوجد.

وبدل التعبير غير الدقيق «يصدق على» يُمكن أن نقول، أيضًا، «يدل

على» بالمعنى الجيد لهذه الكلمة الآيلة إلى الاندثار السريع. بيد أنني أفضل أن أقاوم هنا إغراء الاستعمال الجيد. وغالبا ما يشيع استعمال «يدل على» بمعنى «يُعيّن»، أو «يُسمّي»، بحيث إن استعمال هذا التعبير في علاقة، بـ«شرير»، مثلًا، تدفع القراء للنظر إلى أبعد من الأشخاص الأشرار نحو ذات فريدة تكون إمّا خاصية الشر أو فئة الأشرار، فتعتبرها هي الموضوع المسمّى. وأما العبارة «يصدق على» فأقل عرضة لسوء الفهم؛ وذلك لأنه من الواضح أن «شرير» لا تصدق على خاصية الشر أو على فئة الأشخاص الأشرار، بل على كل شخص شرير على حدة.

عندما نضطر للحديث عن الفئات، أي فئة كل المواضيع التي يصدق عليها الحد، نسميها، مجاراة لتقليد عريق، ماصدق الحدّ. فمَاصِدق «شرير» هو فئة الأشخاص الأشرار؛ وماصِدق «كوكب طبيعي للأرض» هو الفئة التي تشمل عنصرًا واحدًا هو القمر؛ وماصَدَقُ «الغول» هو الفئة الفارغة. بذلك يُمكن القول إن للحدود ماصِدقات، تمامًا مثلما للعبارات قيم صدقية. لكن لا حاجة من اعتبار الحد اسمًا، بكيفية ما، لماصَدَقه، ولا أن نتصور العبارة كاسم لقيمته الصدقية. يتم استعمال الحدود برمتها بسهولة دون الحاجة إلى التسليم بمقولة خاصة للموضوعات المجردة المسماة بالفئات. عادة ما يكفي أن نعرف أن حدًّا مُعطى يَصدق على هذا الفرد بالذات ويكذب على غيره، دون أن نضع أية ذات جماعية مفردة نسميها ماصِدق الحدّ. لا يُمكن أن يكون لبعض حدود نظرية المجموعات حقًّا ماصِدقات، ولا حتى ماصِدق فارغ، انظر الفصل 48.

هناك أربع طرق لربط الحدود أزواجًا لتكوين عبارات تمّت معالجتُها باعتبارها أساسية في ثنايا التراث المنطقي الأرسطي. «كل ك هي ل» و«لاواحد من ك هو ل»، و«بعض ك هو ل»، و«بعض ك ليس ل». وقد أطلق على العبارات التي لها هذا الشكل العبارات المحمولية وقد تم تمييز هذه الصيغ

الأربع بتسميات خاصة وبأحرف رمزية هي: «A» و«E» و«I» و«O»[1]. كما يلي:

ك.م (الكلية الموجبة): كل ك هي ل

ك.س (الكلية السالبة): لا واحد من ك هو ل

ج.م (الجزئية الموجبة): بعض ك هو ل

ج.س (الجزئية السالبة): بعض ك ليس ل

يمكن أن نتشارح ك.م: «كل ك هي ل» باعتبارها تعني «إذا وجد شيء ما هو ك، فإنه ل»: وبذلك نتعرف عليه باعتباره «الشرط المُعمَّم» الذي عرضناه في (1)- (3) من الفصل الثالث. وهناك صيغ كثيرة لـ ك.م تحضر بسهولة في الذهن: «الكافات هي ل»، و«كل واحد (أيًا كان) ك هو ل»، و«أيًا كانت ك فهي ل»، و«الكافات هي حصريًا ل»، «وحدها ل هي ك».

وبالمثل توجد صيغ عديدة لـ ك.س أيضًا: «لاواحد من ك هو(هم) ل»، و«لاشيء هو ك ول معًا» و«لاشيء مما هو ك هو ل». بل وحتى «لا وجود لـ ك هو(هم) ل» (مثلًا، «لا وجود لبجع أسود»)، و«ك هي ل لا توجد».

وكذلك حال ج.م التي يُمكن أن نعبر عنها كالآتي: «بعض ك هو(هم) ل»، و«يوجد شيء ما هو ك ول معًا» و«يوجد شيء ما هو ك وهو ل»، و«توجد ك هي ل»، و«يوجد ك هم ل»، و«ك هي ل توجد». وبطبيعة الحال، تحوز ج.س متغيرات مماثلة.

غالبًا ما تكون الحدود التي تخصّ «ك» و«ل» غير مدركة بكيفية مباشرة في الصيغة العادية للعبارات. فقد تكون مقنَّعة جزئيًا بتعابير من قبيل «لا مكان» أو «حيثما» أو «دائمًا» أو «كل أولئك»، و«أيًا كان من»، أو «في كل مرة»، إلخ. وهكذا فالعبارة «لن أسافر بالقطار إلى أي مكان يُمكنني أن أسافر إليه بالطائرة»، تقبل التحليل إلى صيغة ك.س «لاواحد من ك

(1) استعمل المناطقة في العصور الوسطى هذه الرموز للدلالة على القضايا الحملية الأربع. وتسهيلاً للقراءة سنستعيض عن هذه الرموز في أغلب الأحيان بالاختصارات الآتية: ك.م، ك.س، ج.م، ج.س، كاختصارات على التوالي للكليتين الموجبة والسالبة والجزئيتين الموجبة والسالبة. [المترجم]

هم ل». إذا اعتبرنا «ك» تمثيلًا لـ «مكان يُمكنني أن أسافر إليه بالقطار»، و«ل» تمثيلًا لـ «أي مكان يُمكنني أن أسافر إليه بالطائرة». وأما العبارة: «كل الموجودين بالغرفة يتكلمون الإنجليزية». فتحوز الصيغة ك.م. «كل ك هم ل». حيث تدلّ «ك» على «الأشخاص الموجودين في الغرفة». وتدل «ل». من جهتها، على «الأشخاص الذين يتكلمون الإنجليزية».

إن الاقتصار، في المثال الأخير، على الأشخاص المتضمنين في «كل واحد» أمر أساسي ما دام لا يوجد في الغرفة الأشخاص الذين لا يتكلمون الإنجليزية. وبخلاف ذلك، تستعمل «كل من» الواردة في العبارة «كل من يؤدي واجباته يحصل على توصيل»، بدل «كل شيء» تبعًا لعادة لغوية فقط، وليس لأنّ المتكلم يشعر بالحاجة إلى وضع قوله في مأمن من أن يطال مواضيع غريبة من قبيل وجود مؤدين للواجبات ليسو بشرًا. سيكون من النباهة أن نفهم «ك»، في هذا المثال، باعتبارها تدلّ على «الأشخاص الذين يؤدون واجباتهم»، وسيكون عاديًا جدًّا أن نعتبرها دالة على «مؤدّي الواجبات».

ينبغي أن ننتبه، ونحن نُحوّل عبارات اللغة العادية إلى الصيغ ك.م وك.س وج.م وج.س، إلى اختلالات التعابير اللغوية، ونبحث فيها عن المعنى المقصود. ومن بين هذه الاختلالات حذف الكلمة التي تشير إلى العموم «أيًا»، كما هو شأن «من يتردد يخسر»، و«أود أن أذهب حيثما تذهب»، و«عندما تمطر السماء ينزل الماء»، و«حصلت على ما ترغب فيه». وهناك اختلالات أخرى تكمُن في الاستعمال اللازمنيّ لـ«دائمًا»، و«متى» و«في بعض الأحيان» و«أبدًا»؛ مثال ذلك العبارة:

مجموع زوايا المثلث مساوٍ دائمًا لزاويتين قائمتين

يعني في الحقيقة:

مجموع الزوايا في كل مثلث يساوي زاويتين قائمتين.

ويمكن صياغتها كالآتي: «كل ك هي ل»، حيث تدلّ «ك» على «مجموع زوايا المثلث» و«ل» على «تساوي زاويتين قائمتين».

غالبًا ما تكون صيغة ج.م التي تتعلق بالزمن ضمنية في صيغة الفعل: والشاهد على ذلك، العبارة «رأينا بركان سترومبولي وهو ينفجر»، التي نصوغها: «بعض ك هي ل» معتبرين «ك» دالة على «لحظة مشاهدتنا لبركان سترومبولي» و«ل» دالة على «لحظة انفجار بركان سترامبولي» (انظر الفصل الثامن، (5)). وهناك أمثلة أخرى عن التعابير الزمنية التي تستدعي بعض التأمل، إذا أردنا استخراج بِنيتها المنطقية بشكلٍ سليم، من قبيل:

عرفته قبل أن يفقد ثروته.

عرفته حينما كان في شركة الطاقة الشمسية.

يبدو أن «قبل» و«حينما» تلعبان هنا دور الروابط بين العبارات، على منوال «و»، أو«أو»، أو«→». بيد أن العبارات، بالفعل، أفضل عندما نحللها إلى صيغة «جم»، أي «بعض ك هو ل»، حيث تدلّ «ك» على «اللحظات التي عرفته فيها» وتدل «ل»، على التوالي على «اللحظات السابقة على فقدانه لثروته، وفي الحالة الأخرى على «اللحظات التي كان فيها مع شركة الطاقة الشمسية».

ينبغي أن يكون التفكير، في الحقيقة، هو القاعدة. لأنَّ التأويل الصحيح يجب ألّا يتمّ عمومًا من خلال الاتّباع الأعمى لقائمة التعابير السائدة. فالتعبير «دائمًا» يعني في الغالب «في كل لحظة»، غير أنّه سيكون من الخطأ أن نفهم العبارة «يأكل طاي دائمًا بعيدان الطعام» أنها تعني «يأكل طاي في كل لحظة بعيدان الطعام». فالتأويل الصحيح لهذا المثال هو «كل ك هم ل» حيث تدلّ «ك» على «اللحظات التي يأكل فيها طاي» (وليس اللحظات فقط) وحيث تدلّ «ل» من جهتها على «اللحظات التي يأكل فيها طاي بعيدان الطعام».

إن أهمية اعتبار السياق والمعنى المشترك للوضعية الملموسة، بدل اعتماد معجم بسيط، أمر بيّن حتى في صيغ أساسية من قبيل «يوجد ك هو ل». إن للعبارة «امرأة حاضرة» بالتأكيد الصيغة جم. بيد أنه من المرجح أن العبارة «الكشّاف مبجّل» لها الصيغة ك.م. والحذر ضروري عند استعمال «أيًّا كان» و«كل واحد» بشكل مماثل، لأن العبارتين:

يمكن أن ينتصر جون على كل عضو في الفريق.

يمكن لجون أن ينتصر على أي عضو في الفريق.

لا تحتاجان إلى التمييز بينهما. لكن الفرق يظهر بمجرد ما ندخل النفي:

لا يُمكن لجون أن ينتصر على كل عضو في الفريق.

لا يُمكن لجون أن ينتصر على أي عضو في الفريق.

فالعبارتان الأوليان تحوزان، دون تمييز، الصيغة «كل ك هي ل» (حيث تدلّ «ك» على «عضو من الفريق» و«ل» على «الأعضاء الذين يُمكن لجون أن ينتصر عليهم»)؛ في حين تحوز العبارة الثالثة الصيغة «بعض ك ليست ل»، والعبارة الرابعة لها الصيغة «لاواحد من ك هو ل».

تمارين

رتّب العبارات بحسب الصيغ ك.م وك.س وج.م وج.س، وحدد في كل حالة أي الحدود تمثل «ك» و«ل».

الصابرون مباركون — يجب أن نكون كلنا سعداء كالملوك

ليس كل ما يلمع ذهبًا — لا يكون مصير الشرطي مصيرًا سعيدًا

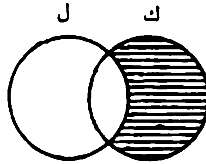
لا إله إلا الله — توجد بعض البسمات التي تجعلنا تعساء

ينابيع الأمل أبدية — سافرت عبر أقصر طريق إلى فاس

تسري القاعدة على الجميع — استوقفني باب مقبرة.

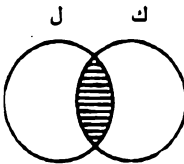
15 مُخطَّطات جون فين

نستعمل في طريقة مُخطَّطات جون فين (Venn) (1880) دوائر متداخلة من أجل تمثيل حدّي العبارة الحملية. تمثل المنطقة التي تتداخل فيها الدائرتان المواضيع التي تمثلها «ك» و«ل» معًا. وتسمى هذه المنطقة في الهندسة بالعدسة، وهي المنطقة المُخطَّطة في الرسم 2. حيث تدلّ «ك» مثلًا على «الفرنسيين» و«ل» على «الفلاسفة»، فتدل بذلك هذه المنطقة على الفرنسيين الفلاسفة. وَوَفقًا لذلك، يمثل الجزء من دائرة «ك» الواقع خارج الدائرة «ل» المواضيع التي هي «ك» وليست «ل»: الفرنسيون غير الفلاسفة، في المثال السابق. تسمّى هذه المنطقة في الهندسة بالهلال وهي تلك المُخطَّطة في الرسم 1. يدل التخطيط على الفراغ: وهكذا يقر الرسم 2 أنه لا ك هي ل، في حين يقر الرسم 1 أنه لا شيء من ك ليس ل، أو بعبارة إن كل ك هي ل.



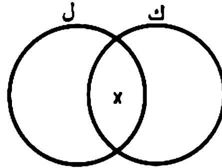
ك.م: كل ك هي ل

الرسم 1



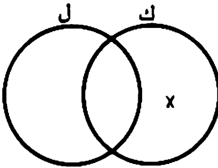
ك.س: لاواحد من ك هو ل

الرسم 2



ج.م: بعض ك هي ل

الرسم 3



ج.س: بعض ك ليست ل

الرسم 4

أما البياض في أي منطقة من مُخطَّطات جون فين فتعني عدم توفر المعلومة. وقد ترك الهلالين في الرسم 2 بلا تخطيط ليس لأننا نعتبر أن بعض ك ليس ل، وبعض ل ليس ك، بل لأن «لا واحد من ك هو ل» لا تزوّدنا بأية معلومة عن الموضوع. فكل ما تفيده «لاواحد من ك هو ل» هو أن العدسة فارغة، وهي المعلومة الوحيدة التي يسجلها الرسم 2. وبالمثل، إذا لم يتم تخطيط العدسة الواقعة على اليسار في الرسم 1. فمردّ ذلك ببساطة إلى أن «كل ك هي ل» لا تقدم لنا أية معلومة عن المنطقتين الأخريين.

ويمثل المجال الكبير الذي يقع خارج الدائرتين الموضوعات التي لا تمثل، إن وجدت، ك ول معًا. وقد تُركت بالأبيض في الرسمين 1 و2 لأن «كل ك هي ل» لا تسلّط الضوء عَلَيّ مواضيع من هذا القبيل، وكذلك الشأن بالنسبة إلى «لا واحد من [redacted]ول[redacted]

هكذا، إذا كان تخطيط المناطق يعني الفراغ، فإن عدم تخطيطها لا يعني يقينًا عدم وجود الفراغ. وبالنسبة إلى عدم الفراغ، نستعمل رمزًا آخر، أي علامة الضرب «×». وعليه فإن الصيغة «بعض ك هي ل»، التي تثبت عدم فراغ العدسة، تؤوَّل بوضع العلامة «×» بداخل العدسة، كما هو الحال في الرسم 3. وهنا كذلك لا يدلّ فراغ المناطق الأخرى على الفراغ أو عدم الفراغ، بل يدل على غياب المعلومة فقط.

وفي الأخير، لا تثبت الصيغة «بعض ك ليست ل» أكثر أو أقل من كون جزء الدائرة ك الواقع خارج الدائرة ل يتضمن شيئًا فيها؛ وهو ما نمثله بوضع العلامة «×» في الهلال، كما هو مبين في الرسم 4.

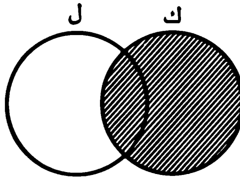
تبرز بعض القوانين البسيطة الخاصة بالعبارات الحملية هندسيًّا في هذه الخطاطات. يعكس تناظر الرسمين 2 و3 أن ترتيب الحدود في ك.س وفي ج.م ليس أساسيًّا: «لا واحد من ك هو ل» تُكافِئ «لا واحد من ل هي ك»، و«بعض ك هي ل» تُكافِئ «بعض ل هي ك». وقد عرف مثل هذا التبديل للحدود قديمًا بالعكس المستوي الكامل ويعكس غياب تناظر الرسمين 1 و4 استحالة تطبيق العكس المستوي الكامل، بشكل عام، على ك.م أو ج.س: إذ لا يجب أن نخلط بين «كل اليونانيين بشر» و«كل البشر يونانيون»، ولا بين «بعض البشر ليسوا يونانيين» و«بعض اليونانيين ليسوا بشرًا».

إن ك.م وج.س متناقضتان أو متنافيتان: تصدق ك.م إذا وفقط إذا كانت ج.س كاذبة. تنعكس هذه العلاقة في الرسوم الهندسية إذ يبيِّن الرسم 1 التخطيط حيث وفقط حيث يبيِّن الرسم 4 العلامة «×». وبالنظر إلى الفراغ، أو غياب المعلومة، إن الرسمين 1 و4 متماثلان: وبالنظر إلى المعلومة يتنافيان ببساطة وبشكل مباشر. وبالمثل، تعتبر الخطاطتان ك.س وج.م متناقضتين: تصدق ك.س إذا وفقط إذا كذبت ج.م.

ويمكن أن نعتبر ك.م وك.س، «كل ك هي ل»، و«لا واحد من ك هي ل»، متقابلتين إلى حد ما؛ غير أن تقابلهما ليس مماثلًا للتنافي، لأننا لا نستطيع القول عمومًا إن ك.م تصدق إذا وفقط إذا كذبت ك.س. وخلافًا لذلك، من المحتمل أن تؤدي أو لا تؤدي أمثلة نضربها بكيفية اعتباطية إلى جعل ك.م وك.س تكذبان معًا؛ كما هو حال كون «ك» تعني «فرنسيًّا» و«ل» «فلاسفة». وبالكيفية نفسها تصدق ج.م وج.س في أغلب الأحوال معًا، كما

هو الحال في المثال نفسه. في حين لا تكون ك.م وج.س صادقتين أو كاذبتين معًا أبدًا: وكذلك الشأن بالنسبة إلى ك.س وج.م، اللتين تشكلان الأزواج المتناقضة الحقيقة، أو المتنافية.

إذا كانت ك.م وك.س في الغالب كاذبتين معًا، وج.م وج.س في الغالب صادقتين معًا، فمن النادر أن تكذب ج.م وج.س معًا، أو تصدق ك.م وك.س معًا: بيد أن هذا ما يحدث إذا لم يوجد أي واحد من ك. ومن الواضح، عندما لا توجد «ك»، أن تكذب «بعض ك هي ل» و«بعض ك ليست ل» معًا. كما أنه إذا لم توجد ك، فإن «لا واحد من ك هو ل» ستصدق بداهة: وستصدق «كل ك هي ل» بالمثل لأنه لا وجود لـ ك ليست ل. ولترجمة هذه النتائج هندسيًا نخطط الدائرة ك برمتها، كما هو الحال في الرسم 5، للدلالة على عدم وجود ك. يجعل هذا الرسم من ك.م وك.س صادقتين، لأنه يبين المنطقتين المخطَّطتين في الرسمين 1 و2: ويجعل ج.م وج.س معًا كاذبتين لأنه يبرز تخطيطًا في مكان علامتي «×» في الرسمين 3 و4.



لا يوجد أي واحد من ك

الرسم 5

قد تبدو ك.م، «كل ك هي ل»، للوهلة الأولى أقوى من ج.م «بعض ك هي ل»: وبالتالي تستلزمها: لكن هذا غير صحيح، لأنه من الممكن ألّا توجد ك. ويمثل الرسم 5 الحالة ذاتها التي تكذب فيها ج.م وإن صدقت فيها ك.م.

وقد يحدث أن تكون كل قِطَعِي النقديّة لمَاعةً (بمعنى أنني لا أتوفر على أية قطع نقدية لها الصفة المناقضة). ومع ذلك قد يكون من الكذب أن بعض قِطَعِي النقديّة لمَاعة، لمجرد كوني لا أتوفر على أية قطعة نقدية. وأفضل ما يُمكن أن نقوله هو أنه إذا كانت «كل ك هي ل» وأن يوجد بعض ك، فإن بعض ك هي ل.

إذا ارتأى القارئ أنه من الغريب أن نقول إن كل القطع النقدية لشخص ما لمَاعة في حين أن ليس لديه أي واحدة، فلربما لأنه يؤوِّل الصيغة «كل ك هي ل» باعتبارها لا تعني «لا واحد من ك ليس ل» فحسب، بل «يوجد بعض ك وكل واحد منهم هو ل». ورغم أن هذا التأويل من بين تأويلات التعابير الغامضة التي يُمكن الدفاع عنها، فمن الواضح أنه ليس التأويلَ الذي قد جعل من ك.م النقيض البسيط، أو نفيًا لـ ج.س: «بعض ك ليس ل». إن اعتبار «كل ك هي ل» ببساطة نقيضًا لـ ج.س ممارسة منطقية عامة وملائمة.

لقد رأينا أن الرسم 5، كما يظهر، يعكس أن ج.م لا تلزم عن ك.م. غير أن رسوم جون فين قد تستعمل لأغراض بنائية، من قبيل تبيان أن ج.م تلزم عن ك.م بإضافة «يوجد بعض ك». ولهذا الغرض، وضعنا رسم ك.م، أي الرسم 1، ثم ندخل «يوجد بعض ك» عبر وضع العلامة «×» في دائرة ك. يجب أن توضع علامة الضرب في الجزء غير المخطط من الدائرة ك، لأننا نعلم أن الجزء المخطَّط فارغ. وهكذا تحقق النتيجة، من خلال ظهور العلامة «×» في العدسة، ج.م.

ينطبق ما قلناه عن العلاقة بين ك.م وج.م بشكل مماثل على العلاقة بين ك.س وج.س: إذ لا يُمكننا أن نستنتج ج.س «بعض ك ليست هي ل» من ك.س، «لاواحد من ك هي ل»، إلا إذا افترضنا وجود بعض ك أيضًا. يبيّن الرسم 5 الحالة التي تكون فيها ج.س كاذبة رغم صدق ك.س. لكن بمقدورنا

أن نبين أن ج.س تلزم عن ك.س و«يوجد بعض ك»، بوضع العلامة «×» في الدائرة ك من الرسم 2 ونلاحظ أننا تحققنا من ج.س.

وأخيرًا، دعونا ننظر في استدلالين بسيطين تصدر فهما النتيجة عن مقدمة واحدة فقط، أوعن افتراض، وليس عن مقدمتين:

بعض ك هي ل	لا وجود لـ ك
∴ يوجد بعض ل	∴ لاواحد من ك هو ل.

يتم التحقق من هذين الاستدلالين، على التوالي، بواسطة الرسمين 3 و5: لأن الرسم 3 يظهر العلامة «×» في دائرة ل دعمًا للنتيجة «يوجد بعض ل»، ويبين الرسم 5 عدسة مخططة دعمًا للنتيجة «لا واحد من ك هو ل».

تمارين

1. هل تلزم كل من ك.م أوك.س أو ج.م أو ج.س عن «لا توجد ل»؟ وهل تتعارض مع «لا توجد ل»؟ استعن بالرسوم الهندسية.
2. ضع رسمًا هندسيًا للعبارة «كل ك هي ل وكل ل هي ك». هل يتطابق هذا مع «لاواحد من ك هو ل»؟ فسِّر ذلك.

16 الأقيسة الحملية

إن ما نسمّيه في المنطق التقليدي الأقيسة[1] استدلالات تشتق فيها عبارة محمولية، باعتبارها نتيجة، من عبارتين محموليتين تعتبران مقدمتين. وعندما نربط العبارات الثلاث نحصل على ثلاثة حدود فقط، يظهر كل واحد منها في العبارتين. وإليك ستة أمثلة، أحدها سبق ذكره في الفصل 14، لتوضيح ذلك:

كل الناس فانون	كل ل هي م
كل اليونانيين ناس	كل ك هي ل
∴ كل اليونانيين فانون	∴ كل ك هي م
لا واحد من الناس كامل	لاواحد من ل هو م
كل اليونانيين ناس	كل ك هي ل
∴ لا واحد من اليونانيين كامل	∴ لا واحد من ك هو م
كل الفلاسفة حكماء	كل ل هي م
بعض اليونانيين فلاسفة	بعض ك هي ل
∴ بعض اليونانيين حكماء	∴ بعض ك هي م

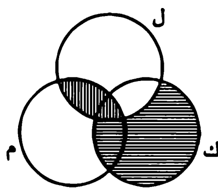
(1) وتحديدا الأقيسة الحملية (المقولية)، لكي نميّزها عن الأقيسة الشرطية التي هي عبارة عن استدلالات صدقية تعالج بواسطة طرائق البتّ الواردة في الباب الأول.

لا واحد من الفلاسفة شرير	لا واحد من ل هو م
بعض اليونانيين فلاسفة	بعض ك هي ل
∴ بعض اليونانيين ليسوا أشرارًا	∴ بعض ك ليس م

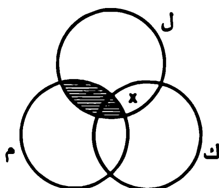
كل اليونانيين بشر	كل م هي ل
بعض الفانين ليسوا بشرًا	بعض ك ليست ل
∴ بعض الفانين ليسوا يونانيين	∴ بعض ك ليست م

بعض الناس ليسوا يونانيين	بعض ل ليس م
كل الناس فانون	كل ل هي ك
∴ بعض الفانين ليسوا يونانيين	∴ بعض ك ليس م.

إن ما نصطلح عليه عادة بالقياس «الصحيح» هو القياس الذي يُبنى من مقدمات صادقة لا يُمكن أن تنتج عنها نتيجة كاذبة. وتزودنا الرسوم الهندسية لفين باختبار بسيط للبت في صحة الأقيسة. نعتمد تداخل ثلاث دوائر، كما هو مبين في الرسمين 6 و7، لتمثيل حدود القياس الثلاثة «ك»، و«ل» و«م». ونقوم بتسجيل مضمون المقدمتين في الرسم بواسطة الطريقة التي شرحناها عند الحديث عن 1-4، ثم نتحقق من الرسم لكي نرى إن كان سيظهر مضمون النتيجة في الخطاطة مباشرة كنتيجة. لذا دعونا نتحقق من ثاني الأقيسة السالفة.



الرسم 6



الرسم 7

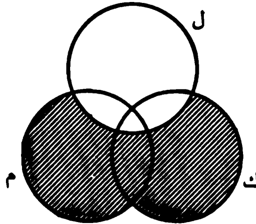
نرسم مقدمته الأولى، «لاواحد من ل هو م»، عبر تخطيط العدسة المشتركة بين الدائرتين ل وم؛ ثم نرسم المقدمة الثانية، «كل ك هي ل»، عبر تخطيط الهلال الموجود داخل الدائرة ك وخارج الدائرة ل. فنحصل على النتيجة التي يمثلها الرسم 6، والتي تثبت النتيجة «لاواحد من ك هو م»، لأن العدسة المشتركة بين الدائرتين ك وم مخطّطة كليًا.

دعونا الآن نتحقق من المثال الرابع من الأمثلة الستة السالفة، نرسم المقدمة الأولى «لاواحد من ل هو م»، كما فعلنا من قبل، ثم نرسم المقدمة الثانية، «بعض ك هي ل» عبر وضع العلامة «x» في الحيز المتبقي من العدسة المشتركة بين الدائرتين ك ول؛ فنحصل على النتيجة الممثلة في الرسم 7، والتي تثبت النتيجة «بعض ك ليس م» لأن هناك علامة «x» بداخل الدائرة ك وخارج الدائرة م.

ونترك للقارئ مهمة بناء رسوم أخرى يتحقق بواسطتها من الأقيسة الأربعة المتبقية (ونجد في آخر هذه الأقيسة أن المقدمة الثانية يجب أن تعالج هي الأولى: لاحظ لماذا).

يُمكن أن نستعمل طريقة الخطاطات ليس للتحقق مما إذا كانت نتيجة معطاة تلزم عن مقدمات معينة فحسب، بل للتحقق مما إذا كانت أية

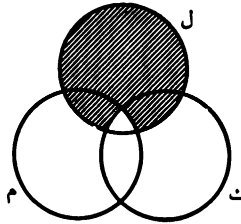
نتيجة (من نوع الاستدلال القياسي) قابلة للاشتقاق من مقدمات معطاة. الواقع أن النتيجة يجب أن تكون، لكي تكون حقًا صادرة عن القياس، هي «كل ك هي م»، أو « لا واحد من ك هو م» أو «بعض ك هو م» أو «بعض ك ليست م»: مما يعني أنه إذا لم تبين الدوائر السفلى في الرسم المنتهي أحد الاحتمالات الممثلة بالرسوم 1-4، فلا وجود لأية نتيجة. فمثلا لا تبيّن الدائرتان السفليتان، في الرسم 8،



الرسم 8

أي نموذج من النماذج الأربعة للرسوم 1-4: وهذا يبرهن على أن المقدمتين «كل م هي ل»، و«كل ك هي ل» لا يُمكنهما أن تكونا مقدمتين لأي قياس صحيح على الإطلاق.

لنأخذ مثالًا آخر تكون فيه المقدمتان هما الصيغتان «كل ل هي م»، و«كل ل هي ك»، كما هو مبين في الرسم 9، ونلاحظ أن هذا الأخير لا يعلل أية نتيجة حملية لـ «ك» و«م». ومع ذلك، فإن هاتين المقدمتين هامتان جدًا من حيث كونهما تعللان تقريبًا نتيجة حملية لـ «ك» و«م».



الرسم 9

أي «بعض ك هي م». إذ يكفي إضافة مقدمة أخرى «يوجد بعض ل» مما يسمح لنا بوضع علامة «×» في الجزء غير المخطط من الدائرة ل لنحصل على النتيجة «بعض ك هي م» تعللها العلامة «×» المشتركة بين الدائرتين ك وم. وهكذا يصبح القياس المقوّى التالي صحيحًا:

كل الإسبارطيين شجعان،	كل ل هي م،
كل الإسبارطيين يونانيون،	كل ل هي ك،
يوجد بعض الإسبارطيين،	يوجد بعض ك:
∴ بعض اليونانيين شجعان	∴ بعض ك هي م

[يُسمّى الحدُّ الذي يلعب دور «ك» في العبارات «كل ك هي ل»، أو «لا واحد من ك هو ل» أو «بعض ك هي ل»، أو «بعض ك ليست ل»، في اصطلاح المنطق التقليدي، موضوع العبارة. وأما الحد الثاني الذي يلعب دور «ل» فيسمّى المحمول ويسمى محمول النتيجة الحد الأكبر للقياس، في حين يسمّى موضوعها الحد الأصغر للقياس. وأما الحد المتبقي الذي يظهر في المقدمتين دون النتيجة، فيسمى الحد الأوسط للقياس. وكل الأمثلة

السابقة قد تم وضعها بحيث تكون «ك» هي الحد الأصغر و«ل» هي الحد الأوسط و«م» هي الحد الأكبر.

وتسمّى المقدمة التي تتضمن الحدين الأوسط والأكبر المقدمة الكبرى للقياس، وتسمى المقدمة الثانية التي تتضمن الحدين الأوسط والأصغر المقدمة الصغرى للقياس. وقد وضعنا، في الأمثلة السابقة، المقدمة الكبرى أولًا ثم المقدمة الصغرى ثانيًا.

كان مناطقة القرون الوسطى يتوفرون على طريقة لترميز صور القياس المختلفة. فقد عبروا عن الأشكال المتوالية للمقدمتين والنتيجة (باعتماد: ك.م وك.س وج.م وج.س) (A, E, I, O) عبر تركيب ثلاثة أحرف: وهكذا فإن الترميز «ك.س ك.م ج.س» يعني أن ك.س هي المقدمة الكبرى، وك.م هي المقدمة الصغرى، وج.س هي النتيجة. وهذا يدل في نظرهم، على ضرب القياس. غير أنه عندما نتوفر على ضرب القياس يبقى علينا أن نعرف إن كانت المقدمة الكبرى تتضمن الحد الأكبر كموضوع، والحد الأوسط كمحمول أو العكس بالعكس: والشيء نفسه يسري على المقدمة الصغرى. تسمى الإمكانيات الأربع للترتيب التي تنتج عن ذلك: **الأشكال**، وهي التي نوردها مرقمة كالآتي:

	الشكل الأول	الشكل الثاني	الشكل الثالث	الشكل الرابع
المقدمة الكبرى:	ل م	م ل	ل م	م ل
المقدمة الصغرى:	ك ل	ك ل	ل ك	ل ك
النتيجة:	ك م	ك م	ك م	ك م

يحدد تعيين الضرب والشكل صورة القياس تماما. وهكذا تكون الأمثلة الستة التي عرضنا في بداية هذا الفصل هي، على التوالي، ك.م ك.م ك.م من الشكل الأول، وك.س ك.م ك.س من الشكل الأول، وك.م ج.م ج.م من الشكل الأول، وك.س ج.م ج.س من الشكل الأول، وك.م ج.س ج.س من الشكل الثاني، وج.س ك.م ج.س من الشكل الثالث.

يمكننا أن نشتق من القياس الرابع من هذه الأقيسة الستة، أعني ك.س ج.م ج.س من الشكل الأول، صيغًا مختلفة بواسطة العكس المستوي الكامل (انظر الفصل السابق)؛ إذ يُمكن أن نحصل من إحدى المقدمتين أو منهما معًا على ما يلي:

لا واحد من م هو ل	لا واحد من ل هو م	لا واحد من م هو ل
بعض ك هي ل	بعض ل هي ك	بعض ل هي ك
∴ بعض ك ليس م	∴ بعض ك ليست م	∴ بعض ك ليست م

يتعلق الأمر بالضرب ك.س ج.م ج.س في الشكل الثاني والثالث والرابع. وبالمثل يتم عكس الضربين ك.س ك.م ك.س وك.م ج.م ج.م من الشكل الأول (المثالان الثاني والثالث اللذان قدمناهما في بداية هذا الفصل) عكسا مُستوِيًا كاملًا إلى ك.س ك.م ك.س من الشكل الثاني وإلى ك.م ج.م ج.م من الشكل الثالث.

يمكن تحويل الأقيسة الأربع المذكورة، أعني ك.س ك.م ك.س في الشكلين الأول والثاني، وك.م ج.م ج.م في الشكلين الأول والثالث إلى أربع أقيسة أخرى عن طريق عكس نتائجها عكسًا مُستوِيًا. فإذا قمنا بذلك، وجب علينا أن نعيد، نتيجة ذلك، كتابة «ك» باعتبارها «م» و«م» باعتبارها «ك» في جميع النتائج بحيث تظل «ك» دالّة على الحد الأصغر، و«م» على الحد الأكبر؛ كما يجب أن نقلب ترتيب المقدمات بحيث تستمر المقدمة الكبرى في

الظهور أولًا. ستكون النتائج، التي يحسن بالقارئ أن يعيد إنتاجها، هي ك.م ك.س ك.س في الشكلين الرابع والثاني، وج.م ك.م ج.م في الرابع والثالث.

هكذا نحصل في المجموع على خمسة عشر ضربًا صحيحًا:

الشكل الأول		الشكل الثاني	
ك.م ك.م ك.م:	ك.س ك.م ك.س:	ك.س ك.م ك.س:	ك.م ك.س ك.س :
ك.م ج.م ج.م:	ك.س ج.م ج.س	ك.س ج.م ج.س:	ك.م ج.س ج.س

الشكل الثالث		الشكل الرابع	
ج.م ك.م ج.م:	ك.م ج.م ج.م:	ك.م ك.س ك.س:	ج.م ك.م ج.م:
ج.س ك.م ج.س:	ك.س ج.م ج.س	ك.س ج.م ج.س	

ونشير إلى أنّ لا واحد من هذه الأضرب الخمسة عشر له المقدمات نفسها، بالنظر إلى الأشكال المختلفة. لدينا هنا خمسة عشر زوجًا مختلفًا من المقدمات، ولكل زوج نتيجة خاصة به. ومن السهل أن نتحقق بواسطة الطريقة الهندسية لجون فين من أنّ لا واحد من أزواج المقدمات الخمسة عشر تستلزم نتيجة قياسية أكثر من تلك التي عيّناها هنا.

وإذا نظرنا إلى الأقيسة من ناحية تركيبية فقط ودون اعتبار وجود النتيجة الصحيحة، ستوجد أربع وستون إمكانية لتركيب مقدمات القياس، فقد تكون هي ك.م ك.م، أو ك.م ك.س، أو ك.م ج.م، أو ك.م ج.س، أو ك.س ك.م ك.س ك.س، أو إلخ. ونحصل على ست عشرة إمكانية كل واحدة منها يُمكن أن تظهر في أحد الأشكال الأربعة. بالإضافة إلى أزواج المقدمات الخمسة عشر التي تُنتج أقيسة صحيحة، يبقى علينا النظر، إذًا، في تسعة وأربعين زوجًا أخرى. والحال أننا رأينا بخصوص الرسمين 8 و9

كيف نتحقق مما إذا كان زوج ما من المقدمات ينتج، فعلًا، نتيجة قياسية. إذا قام القارئ بفحص هذه الأزواج التسع والأربعين، على هذا النحو (وهي تسلية تستغرق ساعة من الزمن)، سيتبين له أن لا واحد منها ينتج نتيجة قياسية. فالأضرب الخمسة عشر للأقيسة المذكورة أعلاه هي الأقيسة الصحيحة الوحيدة.

غير أن تسعة من هذه الأضرب فقط تستحق ميزة مشرف، يتعلق الأمر بأضرب تحتاج، على منوال مثال الإسبارطيين، إلى تقوية بسيطة لمقدماتها. تقوم الصيغة «توجد ك» بهذه المهمة بالنسبة إلى خمسة منها، و«توجد ل» بالنسبة إلى ثلاثة منها، و«توجد م» بالنسبة إلى واحدة منها. دعونا نعرضها كلها في الجدول التالي:

الشكل الأول	الشكل الثاني	الشكل الثالث	الشكل الرابع	المقدمة الإضافية
ك.م ك.م	ك.م ك.س			توجد ك
ج.م: ك.س	ج.س: ك.س			
ك.م ج.س	ك.م ج.س		ك.م ك.س	
		ك.م ك.م	ج.س	توجد ل
		ج.م: ك.س	ك.س ك.م	توجد م
		ك.م ج.س	ج.س	
			ك.م ك.م ج.م	

كانت تُعالج الاستدلالات التي تتضمن ما يسمى بالقضايا الشخصية من قبيل «سقراط إنسان»، مثلًا:

كل إنسان فان، سقراط إنسان ∴ سقراط فان.

في المنطق التقليدي باعتبارها تحوز صيغة ك.م. وهو إجراء اصطناعي لكنه ليس خاطئًا؛ إذ نستطيع أن نؤوِّل العبارة «سقراط إنسان» بـ «كل ل هي م» حيث «ل» تمثل «الأشياء التي تماثل سقراط»؛ هكذا تم تصنيف الاستدلال المذكور ضمن الضرب ك.م ك.م ك.م من الشكل الأول. غير أننا سننتهي، في الباب الرابع، إلى معالجة مختلفة للاستدلال الشخصي.

كان من المعتاد، في المنطق التقليدي، اقتراح قواعد متنوعة للتحقق من صحة الأقيسة. نجد من بينها: يتضمن كل قياس صحيح مقدمة كلية (ك.م أو ك.س)؛ ويتضمن كل قياس صحيح مقدمة موجبة (ك.م أو ج.م)، ويُنتج كل قياس صحيح له مقدمة جزئية (ج.م أو ج.س) نتيجة جزئية؛ تكون نتيجة كل قياس صحيح يتضمن مقدمة سالبة (ك.س أو ج.س) نتيجة سالبة. وهناك قواعد أخرى تتوقف صياغتها على مفهوم «التوزيع» الذي أغفلناه في هذا العرض. تُعتبَر هذه القواعد، باعتبارها طريقةً عمليةً لتقييم الأقيسة، أقل ملاءمة من طريقة الرسوم الهندسية لجون فين. لم نكن حقًّا نحتاج بتاتًا إلى تناول مفاهيم القياس والضرب والشكل في هذه الصفحات لو لم يكن لها أهمية بالغة في المنطق طوال ألفي سنة؛ لأنه بمقدورنا أن نطبق طريقة البتّ بواسطة الرسوم الهندسية على استدلال دون البحث عن وضعه في صنافة الأقيسة المذكورة. كما يصلح اختبار الرسوم الهندسية للعديد من الاستدلالات التي لا تدخل في مجموعة الأضرب المحددة اعتباطيا والمعروفة باسم الأقيسة.

لمحة تاريخية: يعود المفهومان «حملي» و«قياسي» إلى أرسطو، والشيء نفسه يصدق على التصنيف الرباعي للقضايا الحملية وتقسيم أجزاء القياس وتصنيفه إلى أضرب وأشكال. هذا وإن كان الشكل الرابع يُنسب بالأحرى إلى تلميذه تيوفراست (Theophrastus). أما مفهوم التوزيع والقواعد التي يستلزمها فترجع إلى القرون الوسطى. ⌊

تمارين

1. أنشئ رسومًا تتحقق بها من الأقيسة الأربعة المتبقية من الأقيسة الستة الواردة في بداية هذا الفصل.
2. حدد مستعينًا بالرسوم أية نتيجة قياسية، إذا وجدت، تصدر عن أزواج المقدمات التالية:
   - كل كافر شرير: لا واحد من القديسين بكافر.
   - لا ثعبان يطير: بعض الثعابين تبيض.
   - لاشيء مما يبيض له ريش: بعض الأسماك لها ريش.
   - كل ما أهتَمُ به يُنفِر جورج، كل ما تهتم به مابيل ينفِر جورج.
   - كل ما أهتَمَ به ينفِر جورج: كل ما يهتم به جورج ينفِّر مابيل.
3. حدد بواسطة رسم هندسي، بالنسبة إلى كل أزواج المقدمات الواردة في التمرين 2، والتي تفشل في استنباط نتيجة قياس، متى كانت المقدمة الإضافية ذات الصيغة «يوجد بعض ك» أو «يوجد بعض ل» أو «يوجد بعض م»، كافية لاشتقاق نتيجة قياسية.

17 محدودية هذه الطرائق في البتّ

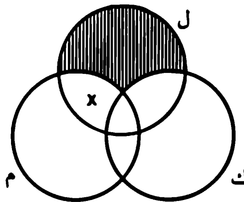
تتكون كل الاستدلالات التي طبقّنا عليها، إلى حد الآن، رسوم فين الهندسية من العبارات الحملية ك.م أو ك.س أو ج.م أو ج.س زائد مقدمة إضافية من قبيل «توجد بعض ك». الحقيقة أنه يُمكن أن تستعمل الرسوم بشكل أوسع قليلًا، كما هو الحال في انتقالنا من المقدمتين:

كل من يوجد على شرق الطريق إما متشرد أو فقير

كل من يوجد على شرق الطريق ليس فقيرًا.

إلى النتيجة: بعض المتشرّدين ليسوا فقراء

نرسم كالعادة ثلاث دوائر، حيث تدلّ «ك» على «الأشخاص المتشردين» وتدل «ل» على «الأشخاص الموجودين على شرق الطريق»، وتدل «م»، أخيرًا، على «الفقراء». ولكي ندخل المقدمة الأولى في الرسم، نخطط المنطقة من «ل» التي توجد خارج «ك» و«م» باعتبارها جزءًا فارغًا: انظر الرسم 10.



الرسم 10

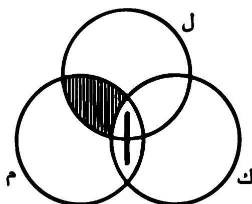
فالجزء المخطط بهذه الكيفية ليس هلالًا أو عدسة، بل شكل ثالث. إنه يمثل أشخاص شرق الطريق الذين ليسوا مُتشرّدين وليسوا فقراء، وهم الأشخاص الذين تنفي وجودهم المقدمة الأولى. أما المقدمة الثانية، التي تقر بأن «بعض ل ليست م»، فترسم، كما هو معتاد، بوضع العلامة «×» في ما تبقى من ل خارج م. ويظهر أن النتيجة تثبت «بعض ك ليست م»، لأن العلامة «×» توجد في ك خارج م.

ويقضي ابتكار يعود إلى س. إ. لويس (C. I. Lewis) (1918) استعمال خط عارض عوض العلامة «×» داخل رسوم فين. وتكمن ميزة الخط العارض في إمكانية رسمه خارج حد ما، فيعين بذلك عدم فراغ منطقة مركبة. وهذا الابتكار مفيد، مثلًا، للاستدلال الذي ينتقل من المقدمتين:

كل الشهود الذين لهم أسهم في الشركة مستخدمون
بعض الشهود مستخدمون أو لهم أسهم في الشركة.

إلى النتيجة: بعض الشهود مستخدمون.

نرسم خطاطة من ثلاث دوائر حيث تدلّ «ك» على «الشهود» و«ل» على «أصحاب الأسهم في الشركة»، وأخيرًا تدلّ «م» على «المستخدمين». تمثّل العدسة المشتركة بين «ك» و«ل»، إذًا، الشهود الذين لديهم أسهم في الشركة. وبناء على المقدمة الأولى، نقوم بتخطيط منطقة هذه العدسة التي توجد خارج م. (انظر الرسم 11). ثم نرسم، بناء على المقدمة الثانية، خطًا عارضًا يعبر المنطقة غير المخطَّطة من ك كلها، والتي توجد داخل م أو ل. يكمُن مدلول الخط العارض في كون هذا الجزء أو ذاك من المنطقة كلها التي يعبرها الخط العارض يتضمَّن شيئًا ما. والحال أن الخط العارض يقع برمته داخل ك وم. وعليه فالنتيجة صحيحة.



الرسم 11

إن فائدة ومرونة استعمال رسوم فين أمرٌ جليٌّ خصوصًا في المثالين الأخيرين. ومع ذلك، يظهر عيبها في كونها تستجيب بسهولة أقل للأدلة التي تشمل أربعة حدود أو أكثر. يُمكن بناء الرسم المكون من أهليلجات متداخلة بالنسبة إلى استدلالات تتكون من أربعة حدود، لكن ذلك يتطلب رسمًا دقيقًا؛ غير أنه لا توجد طريقة لرسم تمثل بشكل معقول خمس مناطق بسيطة أو أكثر في كل التأليفات الناجمة عن هذا التداخل. نستطيع، مع ذلك، أن نحاول تقسيم الاستدلال، عندما نكون أمام العديد من الحدود، إلى أجزاء مرنة تضم عددًا أقل من الحدود. والمثال التالي مقتبس من لويس كارول (Lewis Carrol):

المقدمات: (1) الحيوانات الوحيدة في هذا المنزل قطط؛

(2) كل حيوان يُمكن أن يكون حيوانًا محبوبًا، يحب رؤية القمر؛

(3) عندما أكره حيوانًا، أتفاداه؛

(4) لا حيوان آكل اللحوم، إلا إذا كان يتجول ليلًا؛

(5) لا قط يفشل في قتل الفئران؛

(6) لا حيوانات تعجبني، ما عدا تلك الموجودة بهذا المنزل

(7) لا يُمكن للكنغر أن يصبح حيوانًا محبوبًا

(8) الحيوانات اللاحمة وحدها تقتل الفئران

(9) أكره الحيوانات التي لا تعجبني

(10) الحيوانات التي تتجول ليلًا تحب دائمًا رؤية القمر

النتيجة: أتفادى دائمًا الكنغر

يمكن تقسيم هذا الاستدلال كما يلي: نحصل من (1) و(5) على القضية المساعدة أو النتيجة الوسطى:

(11) كل الحيوانات في هذا المنزل تقتل الفئران؛

وهذا النوع من الخطوات يناسب رسمًا من ثلاثة حدود. ونحصل بالطريقة نفسها من (8) و(11) على:

(12) كل الحيوانات في هذا المنزل حيوانات لاحمة.

ونحصل من (4) و(12) على:

(13) كل الحيوانات في هذا المنزل تتجول ليلًا.

كما نتوصل من (6) و(13) على:

(14) كل الحيوانات التي تعجبني تتجول ليلًا.

وبهذا الأسلوب يُمكن أن نتقدم خطوة تلو أخرى نحو النتيجة المطلوبة دون أن نستعمل أبدًا رسمًا يتكوّن من أكثر من ثلاثة حدود بالنسبة إلى كل خطوة. (إذا كان القارئ يرغب في أن يتحقق بالتفصيل من الأمر برمته، فعليه أن يعتبر مجال القول منحصرًا، لأغراض الاستدلال، في الحيوانات، وبالتالي لا يهتم مطلقًا بـ «الحيوان» في ذاته باعتباره حدًّا).

هكذا يتبيّن أن الطريقة الآلية الخالصة للرسوم الهندسية لا تُلائِم الاستدلال الذي يتضمن عددًا كبيرًا من الحدود: لذا يجب إعمال تقنية إضافية من قبيل تفكيك الاستدلال إلى أجزاء. كما أن طريقة الرسوم الهندسية لا تساعدنا عندما تضاف الدوال الصدقية، كما هو الحال في المثال الآتي:

المقدمات:

إذا كان كل المترشحين الذين توصلوا بالإعلان الثاني هم من الفئة 00′، فإن بعض المترشحين لم يتوصلوا بالإعلان الثاني.

إمّا أنّ كل المترشحين قد توصلوا بالإعلان الثاني وإمّا كل المترشحين من الفئة 00′.

النتيجة:

إذا كان كل المترشحين من الفئة 00′ قد توصلوا بالإعلان الثاني، فإن بعض الذين ليسوا من الفئة 00′ قد توصلوا بالإعلان الثاني.

فإذا أسندنا «ك» و«ل» و«م » بطريقة بديهية، فإن الاستدلال سيتّخذ الصيغة التالية:

كل ك التي هي ل هي م ← بعض ك ليست ل،

كل ك هي ل V كل ك هي م،

∴ كل ك التي هي م هي ل ← بعض ك التي ليست م هي ل.

تصلح الرسوم لمعالجة المكونات «كل ك التي هي ل هي م»، و«بعض ك ليست ل»، إلخ. وتصلح طرائق الباب الأول لمعالجة «←» و«V»؛ ولكن كيف نجمع التقنيتين بشكل صحيح من أجل معالجة استدلال مؤلف من النوع السابق؟

وعليه، حان الوقت لكي نطالب بنظرية أكثر شمولًا. فالصيغ الثلاث التي ذكرناها قبل قليل، والتي تشمل «ك» و«ل» و«م»، عبارة عن صور من النوع نفسه، لكنها تختلف عن الصور التي جاءت في الباب الأول من حيث اشتمالها على «ك» و«ل»، إلخ، وعن كلمات مثل «كل» و«بعض» و«التي هي»، إلخ، مع استبعاد «ب» و«ج»، إلخ. سيتم اختزال مثل هذه الصور، في الفصول الموالية من هذا الكتاب، إلى ترميز منطقي يفسح المجال لـ «طريقة في البت»، أي طريقة آلية معتادة للبت في الصحة واللزوم والاتساق، إلخ.

توجد مثل هذه الطريقة للبث في صور الدوال الصدقية التحليل الصدقي: غير أنه للبت في الفئة الجديدة من الصيغ. تحتاج هذه الطريقة إلى تطوير أكثر. وبمجرد أن نتوفر عليها، سيتم الحسم في كل الاستدلالات من النوع الذي تناولناه في هذا الباب، بما في ذلك الأمثلة التي أتينا على ذكرها، بكيفية آلية بواسطة اختبار اللزوم بين المقدمات والنتيجة.

تمارين

1. تحقَّقْ مِن صحة الاستدلالات التالية بواسطة الرسم الهندمي:

كل الشهود الذين لهم أسهم بالشركة مستخدمون،
كل الشهود إما مستخدمون أو لهم أسهم بالشركة:
∴ كل الشهود مستخدمون

كل من يعرف جورج ومابيل معجب بمابيل،
البعض ممن يعرف مابيل ليس معجبًا بها
∴ البعض ممن يعرف مابيل لا يعرف جورج

لا واحد من البجع الأوروبي أسود
كل بجع أسود أوروبي
∴ لا واحد من البجع أسود

وحدهم الحاصلون على الباكالوريا الذين يستطيعون قراءة الفرنسية مؤهلون للانتخاب.
بعض من يستطيع قراءة الفرنسية ليسوا حاصلين على الباكالوريا.
∴ بعض ممن ليسوا مؤهلين للانتخابات يستطيعون قراءة الفرنسية.

كل شيء إما جوهر أو صفة
الجهات ليست جواهر
∴ الجهات صفات.

تنبيه: كن مستعدًا لتخطيط المنطقة غير المحدودة الواقعة خارج كل الدوائر.

2. أتمم دليل الكنفر، وارسم خطاطة من ثلاثة حدود لتعليل كل خطوة.
3. أنشئ رسم فين، مستعملًا «ك» و«ل» و«م» بالطريقة البديهية، بالنسبة إلى العبارتين التاليتين: (أوليان (Ullian))
   يكون الشيء مرنًا إذا وفقط إذا كان إما محبّبًا أو ثقيلًا.
   إذا لم يكن أي شيء مرنًا فإن لاشيء محبب وثقيل.

18 صور جورج بول

لكي نقول عن موضوع سـ إنه ك، نكتب «ك(سـ)»، وعليه إليك صور عبارات من نوع جديد: ك(سـ)، ل(سـ)، إلخ. يُمكن تركيب هذه الصيغ بواسطة دالة صدقية من قبيل:

(1) ك(سـ) ∧. ¬ل(سـ) .∨. ل(سـ) ← م(سـ).

ونستطيع أن نختصر بشكل مناسب مثل هذه المركبات عبر حذف «سـ»، ووضعه في النهاية على هذا النحو الآتي:

[ك ∧ ¬ل ∨ (ل ← م)] سـ

نتوصل بهذه الوسيلة إلى صور تمثيلية لبعض الحدود المركبة، أي صور حدود من قبيل «¬ل»، و«ك ∧ ¬ل»، و«ل ← م»، و«ك ∧ ¬ل ∨ (ل ← م)» إلخ، التي سنسميها **صور الحدود البولية**.

هب أن «ك» تعني «أسود» و«ل» تعني «بجع»: ستكون «¬ل» هي «ليس بجعًا» و«ك ∧ ل» هي «بجع أسود»؛ لذا ستصدق «ك ∧ ¬ل» على الأشياء السوداء الأخرى فقط، وستصدق «ك ∨ ل» على البجع والأشياء السوداء بشكل عام. وتصدق «ك ← ل» «إذا كان أسود فإنه بجع» على كل شيء بجع إذا كان أسود، وبالتالي كل بجع وكل ما ليس أسود: إنها تُكافِئ «¬ك ∨ ل» أو «¬(ك ∧ ¬ل)».

عندما نطبق «و» و«أو» على الحدود نجد تذبذبًا غريبًا يسمح بذلك. إن الأشياء التي تكون بجعًا أو سوداء (ك ∨ ل) هي البجع والأشياء السوداء. والأشياء التي تكون بجعًا وسوداء (ك ∧ ل) ليست بجعًا وأشياء السوداء، بل بجعٌ سوداء فقط.

تمتد مفاهيم الصحة والاتساق واللزوم بشكل طبيعي من الصور الصدقية القديمة إلى صور الحدود البولية؛ وعليه تكون صورة حدية صحيحة إذا كانت صيغة العبارة الناتجة، والتي تتضمن سـ صحيحة صدقيًا بالمعنى القديم. هكذا ما دام أن «ك(سـ) V ¬ك(سـ)» أو «(ك V ¬ك)سـ» صحيحة، سنقر بصحة «ك V ¬ك» نفسها. والشيء نفسه في ما يخص الاتساق واللزوم، إذ نقول مثلًا عن «ك ∧ ¬ك» إنها غير متسقة وعن «ك ∧ ل» أنها تستلزم «ك V ل».

تعني الصحة المتعلقة بصيغة حد ما أنَّ كل تأويل لأحرفها يجعل منه هو نفسه حدًا يصدق على كل موضوع سـ لكن بأي معنى يكون هذا التأويل؟ عندما نتحدث عن تأويل أحرف الحدود، من الأفضل أن نعطي لأنفسنا الحرية في اختيار مجال القول، أي مجموع المواضيع سـ الملائمة للحجة المنطقية التي نودّ إنجازها. مثل هذه الحرية تُنقِص عادة بواحد من العدد المطلوب من الحدود كما رأينا ذلك سابقًا مع مثال الكنغر. هكذا نؤول حرف الحد «ك» عبر تعيين المواضيع التي يصدق عليها «ك». ضمن هذه الشروط تكون الصورة الصحيحة لحد ما هي الصيغة التي تصدق على كل المواضيع في أي مجال قول محتار، وبالنسبة إلى كل التأويلات داخل هذا المجال، وعلى حروفها.

تصدق الصيغة المتسقة لحد على بعض المواضيع في بعض العوالم بالنسبة إلى بعض تأويلات حروفها. تستلزم صيغة حد ما صيغة أخرى إذا كان كل تأويل، في كل مجالات القول، يجعل الصورة الثانية تصدق على كل ما تصدق عليه الصيغة الأولى.

وحيث إن صور الحدود البولية تحوز بالتحديد بنية الصور الصدقية القديمة، فإننا نستطيع أن نتحقق من صحتها واتساقها ومن علاقات لزومها بواسطة تحليل صدقي كما لو كانت «ك» و«ل» إلخ، هي «ب» و«ج» إلخ، بل

نستطيع أن نلجأ إلى عمليات الفحص الانتقائي كلّما سنَحَتْ لنا الفرصة بذلك. وإذا بدا غريبًا أن نستبدل، على هذا النحو، «ص» و«ك» بأحرف الحدود، لنتخيل عندئذٍ أن هذه الاختبارات لا تنطبق، في الواقع، على صور الحدود ذاتها، بل على صيغ العبارت التي نحصل عليها انطلاقًا من صيغ الحدود بوضع «س» كما هو الحال في (1).

سنستعمل جيدًا القانون التالي:

(1) إذا كانت صيغة الحد البولية متسقة، فإنه يوجد في أي مجال مكوَّن من موضوع ما تأويل لحروف الحدّ، إلخ، يجعل الصيغة تصدق على هذا الموضوع.

مناط ذلك أن الصورة المتسقة تنتج «ص» وفق بعض إنابات «ص» و«ك» بالحدود الحدية. علينا فقط أن نؤوِّل حرف حدٍّ باعتباره يصدق ويكذب على موضوع ما وَفقًا لكون منيبه «ص» أو «ك».

وحيث إن الصحة هي عدم اتساق النفي، فيمكن صياغة (1) على هذا النحو:

(2) إذا لم تكن صيغة الحد البولية صحيحة، فإنه يوجد في أي مجال مكوَّن من موضوع ما تأويل لحروف الحد يجعل الصيغة كاذبة بالنسبة إلى هذا الموضوع.

وبما أن فشل اللزوم يعني اتساق الصورة الأولى مع نفي الثانية، فإن لـ (1) اللازمة الإضافية الآتية:

(3) إذا كانت صيغة الحد البولية لا تستلزم صيغة أخرى، فإنه يوجد في أي مجال مكوَّن من موضوع ما تأويل لأحرف الحد يجعل الصيغة الأولى صادقة بالنسبة إلى هذا الموضوع والثانية كاذبة بالنسبة إلى الموضوع نفسه.

ولنقم الآن بتعميم (1):

(4) إذا كانت حا$_1$،...، حا$_ن$ صورًا للحدود البولية، وإذا كانت كل واحدة منها متسقة بشكل فردي، فإنه يُوجد في أي مجال مكوَّن من سـ$_1$،...، سـ$_ن$ تأويل لـ لحروف الحد، يجعل، في الوقت نفسه، حا$_1$ تصدق على سـ$_1$، وحا$_2$ تصدق على سـ$_2$، وهكذا دواليك.

يتم الاستدلال كالآتي: نؤول حروف الحد، كما هو الحال في (1)، باعتبارها تصدق أو تكذب على سـ$_1$، بطريقة تجعل حا$_1$ تصدق على سـ$_1$. لكن هذا يجعلنا أحرارًا في تأويل حروف الحد نفسها باعتبارها تصدق أو تكذب، كما يحلو لنا، على سـ$_2$، ونقوم بالشيء نفسه بحيث نجعل حا$_2$ تصدق على سـ$_2$. ونستمر على هذا النحو.

مثال: هب أن حا$_1$، وحا$_2$، وحا$_3$ هي على التوالي «ك ∧ ¬ل» و» ل ∧ ¬م»، و«¬ك ∧ م»، وهب أن سـ$_1$، وسـ$_2$، وسـ$_3$، هي على التوالي طوم وديك وهاري. إن إنابة «ص» بـ «ك» و«ك» [القيمة الصدقية] بـ «ل» تختزل «ك ∧ ¬ل» إلى «ص»: لنؤوّل إذًا «ك» و«م»، دون «ل»، باعتبارهما يصدقان على طوم. وبالطريقة نفسها، لنؤوّل في ما يخص «ل ∧ ¬م»، «ك» و«ل»، دون «م»، باعتبارهما يصدقان على ديك. وعلى المنوال نفسه دائمًا لنؤوّل أخيرًا، في ما يخص «ل» و«م»، وليس «ك»، «¬ك ∧ م» باعتبارهما يصدقان على هاري. هكذا يتم تأويل «ك»، في مجال طوم وديك وهاري، باعتبارها تصدق على طوم وديك فقط، و«ل» باعتبارها تصدق على ديك وهاري فقط، و«م» باعتبارها تصدق على طوم وهاري.

بعد عرض هذه القوانين الأربعة الخاصة بالصور الحدية البولية، ننتقل إلى صور بولية من نوع آخر. دعونا نكتب الآن «V» بالنسبة إلى «يوجد» بمعنى «يوجد على الأقل شيء واحد». يتعلق الأمر بأداة تصدير تنتج، عندما نطبقها على حد كلي، عبارة: «يوجد بجع أبيض» التي نرمز لها بالصيغة:

«Vك ∧ ل». وتسمى الصيغة: «V ك ∧ل»، المكونة من «V» متبوعة بصيغة حد بولية، الصورة الوجودية البولية.

تتم الآن صَوْرَنة المثال الخاص بالفئة 00َ، في نهاية الفصل السابق، بالطريقة الآتية:

(2) ¬Vك ∧ ل ∧ ¬م ← Vك ∧ ¬ل.

¬V ك ∧ ¬ل ∨ ¬ Vك ∧ ¬م.

¬Vك ∧ م ∧ ¬ل ← Vك ∧ ¬م ∧ ل.

تسمى الصيغ من قبيل هذه الثلاث، أي التي هي دوال صدقية للصور الوجودية البولية، صور العبارات البولية.

تعتبر هذه الصور صحيحة عندما تكون صادقة بالنسبة إلى كل التأويلات في كل مجالات القول غير الفارغة. ومن المناسب القيام بهذا الاستثناء بخصوص المجال الفارغ لأنّه من بين صور العبارات البولية، بخلاف صور الحدود، نجد أن بعضها من قبيل «Vك ∨ ¬ Vك» لا تصلح لمجال فارغ إلا أنها صحيحة ومفيدة في مجالات أخرى. عادة ما يكون المجال الذي يتعلق به استدلالنا معروفًا مسبقًا أو نعتبر من أنه ليس فارغًا، بحيث إن فشل صيغة ما في الحالة الوحيدة للمجال الفارغ لا يمثل عادة شيئًا ضده من الناحية العملية.

الحقيقة أن المجال الذي نحتاج إليه في الأدلة المستمدة من الصور البولية يكون، في غالب الأحيان، معروفًا أو يعتبر متضمنا ليس لبعض العناصر فقط، بل لعدد كبير منها. ومن هنا، لماذا لا نقول، في تعريف الصحة، بدل «كل اختيار لمجال غير فارغ»، «كل اختيار لمجال يحوز أكثر من أحد عشر عنصرًا»؟ إن السبب في عدم القيام بذلك هو أنه لا صورة جديدة ستنضاف إلى صنف الصيغ الصحيحة عبر مثل هذا التحرر في التعريف. إذا أمكن تكذيب صيغة ما بواسطة تأويلات معينة لـ«ك» و«ل»،

إلخ، في عوالم صغيرة لكنها غير فارغة، فمن الممكن تكذيبها أيضًا في مجالات أكبر لا حد لها.

نورد الاستدلال على ذلك كالتالي: نفترض وجود مجال صغير وغير فارغ، وليكن سـ موضوعًا من هذا المجال. نفترض، بالإضافة إلى ذلك، تأويلا لـ «ك» و«ل»، إلخ، يُكذِّب في هذا المجال صيغة معطاة. ولنضف عندئذ إلى هذا المجال ما نشاء من المواضيع الجديدة، ولنؤوّل «ك»، و«ل»، إلخ، في المجال المُوسَّع عبر جعل كل المواضيع الجديدة تزاوج سـ بعبارة أخرى، هب أن «ك» تصدق على كل المواضيع الجديدة أو على لا واحد منها، وَفقًا لكون «ك» تؤول باعتبارها تصدق أو تكذب على سـ؛ ولنقم بالشيء نفسه مع «ل» والأحرف الأخرى. سيكون من المستحيل تمييز المواضيع الجديدة عن سـ ما دام الأمر تعلّق بتأويل صيغتنا. ويمكن تكذيب الصيغة تمامًا كما حدث في السابق.

هكذا، لحسن الحظ، يكون الاستثناء الوحيد الذي يجب القيام به عند تعريف الصحة هو المجال الفارغ؛ لكن يجب ألا نقلل من شأنه، فقد يحدث أن يتطور دليل بطريقة ملائمة جدًّا عبر اختيار مجال تترك خاصية عدم فراغه مُعَلَّقة. غير أنه ليس من الضروري أن ندرج المجال الفارغ في نظريتنا العامة للصحة لأن مسألة معرفة ما إذا كانت صيغة ما تصلح للمجال الفارغ تعالج بسهولة كمسألة منعزلة. يكفي، لكي نبتّ في ما إذا كانت صورة ما صادقة في حالة المجال الفارغ، أن نضع «ك» [القيمة الصدقية] مكان المكونات الوجودية ونبتّ في العبارة.

ومثلما تعتبر صورة العبارة البولية صحيحة عندما تصدق بالنسبة إلى كل التأويلات وفي كل المجالات غير الفارغة، تعتبر كذلك متسقة عندما تصدق بالنسبة إلى بعض التأويلات في بعض المجالات غير الفارغة. وتستلزم صيغة عِبارية صيغة أخرى، إذا كان كل تأويل يجعل، في كل مجال غير فارغ،

الأولى صادقة يجعل الثانية صادقة أيضا. وكما سلف الذكر، إن عدم الاتساق هو صحة النفي، واللزوم هو صحة الشرط. في حين يظل التكافؤ، كما سلف الذكر، هو اللزوم المتبادل، أو صحة التشارط أيضًا.

نستأنف ببعض القوانين المتعلقة بالصور الوجودية البولية:

(5) تكون الصورة البولية صحيحة إذا وفقط إذا كانت صيغة حدها صحيحة.

مناط ذلك إذا كانت صيغة الحد صحيحة، فإن كل تأويل يجعلها تصدق على كل شيء وفي كل مجال، ومِن ثَمَّ تصدق على شيء ما في كل مجال غير فارغ. أما إذا لم تكن صيغة الحد صحيحة، فإنه يوجد، بموجب (2)، تأويلٌ يجعل صيغة الحد كاذبة بخصوص الموضوع الوحيد المكوِّن لمجال ما، وطبقًا لهذا التأويل يظهر كذب الصورة الوجودية.

(6) تكون الصورة الوجودية البولية متسقة إذا وفقط إذا كانت صورة حدّها متسقة.

لأنه إذا كانت صورة الحد متسقة، فإنه يوجد، بموجب (1)، تأويل يجعل صيغة الحد تصدق على شيء ما، وبالتالي يجعل الصورة الوجودية صادقة. في حين إذا كانت صورة الحد غير متسقة، فإن كل تأويل يجعلها كاذبة بالنسبة إلى كل المواضيع، ومن ثَمَّ يجعل الصيغة الوجودية كاذبة.

(7) تستلزم صورة وجودية بولية صيغة أخرى إذا وفقط إذا كانت صيغة الحد الأولى تستلزم صيغة الحد الثانية.

هب أن صيغة الحد الأولى تستلزم الثانية، فإن كل تأويل يجعل صيغة الحد الأولى تصدق على شيء ما سيجعل الأخرى تصدق على الشيء نفسه. وكل تأويل يجعل الصيغة الوجودية الأولى صادقة، سيجعل إذًا الصيغة الثانية صادقة، وبذلك تستلزم الصورة الوجودية الأولى الثانية. ولنفرض أيضًا أن صورة الحد الأولى لا تستلزم الثانية، فإنه يوجد، وبموجب (3)،

تأويلٌ يجعل صيغة الحد الأولى تصدق على العنصر الوحيد من مجال معين ويجعل الصيغة الثانية تكذب بالنسبة إلى العنصر نفسه. يجعل هذا التأويل الصيغة الوجودية الأولى صادقة والثانية كاذبة، وعليه لا تستلزم الصورة الوجودية الأولى الثانية.

هناك نقطة هامة أخرى تتعلق بالصيغ الوجودية البولية تكمُن في أنه لا يُمكن أن تكون متعارضة، فالوصل «Vك ∧ ¬ل .∧ V ل∧ ¬م .∧ V ¬ك ∧ م» متسق رغم التعارض بين «ك ∧ ¬ل»، و«ل ∧ ¬م»، و«¬ك ∧ م». هكذا نحصل على القانون التالي:

(8) يكون وصل الصور الوجودية البولية متسقًا متى كانت كل صورة على حدة متسقة.

لأنه عندما تكون الصور الوجودية متسقة ذاتيًا، تكون الصورة الحدية في كل واحدة متسقة ذاتيًا وَفقًا لـ (4). وبالتالي يوجد تأويل، طبقًا لـ (4)، في مجال قول ما يجعل كل واحدة من صور الحدود تصدق بشكل متزامن على هذا الموضوع أو ذاك، وهو تأويل يجعل كل صيغ الوجود صادقة.

سنستعمل في الفصل اللاحق بشكل مهم قانونًا أكثر تعقيدًا إلى حد ما. وهو كالآتي:

(9) تكون صورة وجودية بولية لازمة عن وصل صور وجودية بولية فقط إذا كانت لازمة عن إحدى هذه الصور مستقلة.

هب أن حا وحا$_1$، حا$_2$،...، حا$_ن$ صورًا وجودية بولية، وهب أن لا صيغة من الصيغ Vحا$_1$، Vحا$_2$،...، إلخ.، تستلزم Vحا بشكل منعزل: يجب أن نبرهن أن وصل Vحا$_1$ ∧ Vحا$_2$∧... ∧ Vحا$_ن$ لا يستلزم Vحا. بموجب (7)، ما دامت «حا$_1$» لا تستلزم «حا»، فإن «حا$_1$ ∧ ¬حا» متسقة. وكذلك حال «حا$_2$ ∧ ¬حا» و«حا$_3$ ∧ ¬حا»: وهكذا دواليك. يوجد، وَفقًا لـ (4)، تأويل لحروف الحد في مجال يتكون من ن من المواضيع س$_1$...س$_ن$ يجعل بشكل متزامن

«حا$_1$ ∧ ⌐حا» تصدق على س$_1$ و«حا$_2$ ∧ ⌐حا» تصدق على س$_2$، وهلم جرًا. وطبقًا لهذا التأويل لا تصدق «حا» علي أي واحد من المواضيع س$_1$،...س$_ن$ في مجال القول؛ وعليه تصدق «Vحا$_1$» و«Vحا$_2$» إلخ، كلها وتكذب «Vحا». ومن ثَمَّ لا تلزم «Vحا» عن «Vحا$_1$ ∧ Vحا$_2$ ∧... ∧ Vحا$_ن$».

أخيرًا، نصل إلى قانون بديهي لكنه هام يثبت أن «V» يتوزع على الفصل، وهو قانون صحيح:

(3) V(ك vل) ↔ Vك v Vل.

من الواضح أن بعض الأشخاص قديسون أو عباقرة إذا وفقط إذا كان بعضهم قديسين أو بعض الأشخاص عباقرة. ولا يُستبعَد طبعًا أن يوجد من هم قديسون وعباقرة في الوقت نفسه، بل لا يُستبعَد كذلك أن يكون بعض القديسين عباقرة.

يجب ألّا نسمح لبداهة (3) بأن تشجّعنا على فكرة أن «V» توزع أيضًا على الوصل. تضمن لنا (7) حقًّا بقدر كاف أن «Vك ∧ ل» تستلزم «Vك ∧ Vل»، لكن العكس لا يستساغ. توجد أشياء مستديرة وأشياء مربعة، على أي حال، لكن لا وجود لمربعات دائرية.

وإذا لم يكن هذا التحذير ضروريًا حقًّا، فربما يكون التحذير الموالي أكثر ضرورة بهذا الشأن: إن تركيب «⌐ V» لا يوزع حتى على الفصل. وعليه لنعتبر «ك» هي «حصان» و«ل» هي «وحيد القرن». في هذه الحالة تكون «Vل» كاذبة، وبالتالي«⌐ Vك v ⌐ Vل» صادقة؛ في حين تكون «⌐ V(ك v ل)» كاذبة لأن «ك v ل» تصدق على الأحصِنة.

من المؤكّد أن القانون (3) يسمح لنا بأن نقوم بتوزيع في «⌐ V (كvل)»، فنحصل على:

⌐ V(ك v ل) ↔ ⌐(Vك v Vل) ↔. ⌐ Vك v ⌐ Vل.

لمحة تاريخية: تعود فكرة المجالات المتغيرة إلى دي مورغان (1846)، وكذلك تعبير «مجال القول». كما كان استبعاد المجال الفارغ صريحًا من قبل في منطق فريغه سنة 1879. أما الدليل الذي قدمنا أعلاه لدفع المجال الفارغ فنجده عند هلبرت وأكرمان (Hilbert and Ackermann, 1938, p. 92) ودون شك في أعمال سابقة أيضًا. يعود الرمز «∃ (أي V)» وقانون توزيعه (3) إلى بيانو (1895).

تمارين

1. على منوال أسلوب (2) قم بترميز صيغ الأمثلة الخمسة للتمرين (1) من الفصل السابع عشر.
2. استعن بـ (9) و(7)، للبتِّ في ما إذا كانت الصيغة:

V(ك ↔ ل) ∧. Vك ∧ ¬ل ∧. V(¬ك ∨ ¬ل)

تستلزم: «V ¬ك ∧ ل» كيف؟ تحقق من ذلك.

19 طرائق البتّ في الصحة

أصبح بمقدورنا، من الآن فصاعدا، أن نتحقق من صحة كل صور العبارات البولية: سأعرض وأعلل الاختبارات في كل حالة على حدة، وَفقًا صيغة الصورة. ترتد الاختبارات، في كل الحالات، إلى التحليلات الصدقية لصور الحدود البولية.

(1) تكون صيغة وجودية بولية صحيحة إذا وفقط إذا كانت صيغةُ حدِّها صحيحةً. (وهذا هو القانون (5) من الفصل السابق).

(2) يكون نفي صيغة وجودية بولية صحيحًا إذا وفقط إذا كانت صيغةُ الحدِّ غيرَ متسقة.

وذلك لأن النفي يكون صحيحًا إذا وفقط إذا كانت الصورة الوجودية نفسها غير متسقة، ومن ثَمَّ، تبعًا للقانون (6) من الفصل السابق، إذا وفقط إذا كانت صيغة الحد غير متسقة.

(3) يكون فصل صورة وجودية منفية بولية صحيحًا إذا وفقط إذا كان أحد نوافيها يحقق اختبار الصحة السابق.

مناط ذلك أن فصل نوافي الصور الوجودية يُكافِئ حقًّا نفي وصل الصور الوجودية، وهذه الأخيرة تكون صحيحةً فقط في الحالة التي يكون فيها الوصل غير متسق؛ غير أن هذا الوصل يكون، وَفقًا للقانون (7) من الفصل السابق، غير متسق فقط في الحالة التي تكون فيها إحدى الصور الوجودية غير متسقة، ومن ثَمَّ في الحالة التي يكون فيها أحد نوافي الصور الوجودية صحيحًا فقط.

يتعلّق الاختبار الموالي بالشرط الوجودي الذي أعني به الشرط الذي يكون مُقَدَّمُه صورة وجودية بولية أو وصلًا لصيغ من هذا القبيل، والذي يكون تاليه صورةً وجودية بولية.

(4) يكون الشرط الوجودي صحيحًا إذا وفقط إذا كانت صيغة الحد البولية التي تظهر في إحدى الصيغ الوجودية للمُقدَّم تستلزم صيغة الحد البولية التي تظهر في التالي.

وذلك لأن الشرط الوجودي يكون صحيحًا إذا وفقط إذا كان المقدَّم يستلزم التالي. وبموجب (9) من الفصل السابق، ستكون تلك هي الحالة إذا وفقط إذا كانت إحدى الصور الوجودية للمقدم تستلزم التالي. وبموجب القانون (7) من الفصل السابق، ستكون تلك هي الحالة إذا وفقط إذا كانت صيغة الحد الأولى تستلزم الثانية.

لا يحتاج الاختبار الآتي إلى تعليق.

(5) يكون وصل صيغ العبارات البولية التي يكون لها شكل من الأشكال المذكورة في (1)-(4) صحيحًا إذا وفقط إذا ظهرت صحة كل واحدة منها بالنسبة إلى الاختبارات (1)-(4).

لنتأكد من تمام اختبارنا لصحة صور العبارات البولية، يبقى أن نبيّن فقط أن كل صور العبارات البولية يُمكن أن نصوغها بأحد الأشكال الخمسة المذكورة في (1)-(5)، وذلك بإجراء تحويلات على أجزائها تحافظ على التكافؤ. يتوقف الاعتماد على الأجزاء القابلة للمبادلة على قانون مبادلة مماثل لذاك الذي رأيناه في الفصل التاسع. لقد رأينا أنه بمقدورنا أن نستبدل كل مكوّن من مكوّنات صيغة صدقية بمكوّن يكافئه دون أن يمسّ ذلك صحة أو اتساق الصيغة برمتها، ودون أن تتأثر، علاوة على ذلك، علاقات لزومها وتكافؤها مع صيغ أخرى. يظل التبادل من هذا النوع صالحًا لصور العبارات البولية، وللسبب نفسه تمامًا. لقد كان صالحًا للدوال الصدقية الخالصة

لأن القيمة الصدقية للعبارة المركّبة لا تتوقف فيه على أية خاصية أخرى للعبارات المكوِّنة سوى قيمتها الصدقية. ويظل صالحًا في الوقت الراهن للدوال الصدقية، ولـ «∨» لأن القيمة الصدقية للعبارة المركبة لا تتوقف، في الحقيقة، على أية خاصية أخرى للعبارات والحدود المكوِّنة غير صدقها أو كذبها على شيء أو على لاشيء.

لكي نحوِّل صيغة عبارة بولية معينة «عا» إلى أحد الأشكال الخمسة المذكورة أعلاه، نبدأ بتحويل عا إلى صيغة قانونية وصلية كما هو الحال في الفصل الثاني عشر. ولهذه الغاية، سنعالج كل صيغة وجودية ترد في عا كما لو كان الأمر يتعلّق بحرفٍ قضويّ بسيط «ب»، و«ج»، إلخ. ستتخذ عا، نتيجة ذلك، صيغة وصلية لفصليات. ويكون كل فصل من هذه الفصليات عبارة عن فصل لصور وجودية، أو نفي لصور وجودية منفية أو هما معًا. بيد أنه، ليس من الضروري بتاتًا أن نحافظ على فصل لصيغ وجودية بفضل قانون التوزيع، (3) في الفصل السابق. بعد تحويلها بواسطة هذا القانون سيجعل كل فصل من فصلياتها عبارة عن فصل (واحد أو أكثر) لصيغ وجودية منفية ولصيغ وجودية واحدة على الأكثر. إذا تعلّق الأمر بفصلٍ يتضمّن نفيًا واحدًا من هذا النوع، سيندرج ضمن (2)؛ أما إذا تضمن أكثر من ذلك، فإنه سيندرج ضمن (3). وإذا تعلّق الأمر بفصل لا يشمل على أيّ نفيٍ، وصيغة وجودية مثبتة وحيدة، فإنه سيندرج ضمن (1). وأخيرًا، إذا تعلق الأمر بفصل يتضمّن نفيًا أو أكثر لصيغ وجودية ولصيغة وجودية واحدة، فإنه سيكافئ شرطًا وجوديًا، فيندرج ضمن (4)؛ لأن «¬ب$_1$ ∨ ¬ب$_2$ ∨...∨ ¬ب$_ن$ ∨ ج» تُكافِئ «ب$_1$ ∧ ب$_2$ ∧... ∧ب$_ن$ ← ج».

ولتبسيط المسألة دعونا نطبق الاختبار على القياس الثالث ك.م ج.م ج.م الوارد في الفصل السادس عشر، تصير مقدمتا هذا القياس، عندما نترجمها إلى صيغ العبارات البولية، كالآتي: «¬∨ل ∧ ¬م» و«∨ك ∧ ل».

والنتيجة هي «Vك ∧ م». وعليه تكون صيغة العبارة البولية التامة التي ينبغي أن نتحقق من صحتها هي:

−Vل ∧ − م. ∧ Vك ∧ ل . → Vك ∧ م.

وحتى نحول هذه الصيغة إلى صيغة قانونية وصلية، نترجم الشرط إلى الفصل والنفي:

− (−Vل ∧ −م. ∧ Vك ∧ ل) ∨ Vك ∧ م.

يتطلب الانتقال إلى الصورة القانونيّة الوصلية خطوة إضافية

Vل ∧ −م ∨ − Vك ∧ ل∨ Vك ∧ م

بعد ذلك ندمج الصيغتين الوجوديتين المثبتتين:

− Vك ∧ ل ∨ V(ل ∧ −م ∨ ك ∧ م)

وهي الصيغة التي تغدو، بعد ترجمتها إلى صيغة الشرط الوجودي، كالآتي:

Vك ∧ ل → V(ل ∧−م ∨ ك ∧ م)

وأخيرا إن هذه النتيجة صحيحة بموجب الاختبار (4). يبيّن الفحص الانتقائي فعلًا أن «ك ∧ ل» تستلزم «ل ∧ −م ∨ ك ∧ م».

لنطبق الآن الاختبار على الاستدلال المتعلق بفئة 00′، الذي قمنا بتطويره إلى أن حصلنا على الصيغة (2) في منتصف الفصل السابق. ولكي نثبت هذا اللزوم نود أن نبيّن صحة الشرط:

−Vك ∧ ل ∧ −م→ Vك ∧ −ل .∧ −Vك ∧ −ل ∨ −Vك ∧ −م .→.

− Vك ∧ م ∧ −ل → Vك ∧ − ∧ م ∧ ل.

يمكن لعمل مميز عادة أن يكون مقتضبًا لو أننا قمنا، منذ البداية، بتبديل أحرف كل حد على حدة مع مراعاة الترتيب الأبجدي، وهو الإجراء الذي سيقوي تطابق الحدود، ومعه فرص الاختزال؛ فنحصل عندئذ على ما يلي:

− Vك ∧ ل ∧ −م → Vك ∧ −ل .∧ − Vك ∧ −ل ∨ −Vك ∧ −م .→.

−Vك ∧ −ل ∧ م → Vك ∧ ل ∧ −م.

نترك مراحل تحويل العبارة إلى صيغة قانونية وصلية للقارئ، فإذا ما تم حذف المكونات التي تكون صحيحة بشكل جلي نحو: «¬ ب V جـ V ب»، فيجب على القارئ أن يحصل في النهاية على ما يلي:

¬ Vك ٨ ¬ل V Vك ٨ ¬م V Vك ٨ ¬ل ٨ م V Vك ٨ ل ٨ ¬م.

وإذا دمجنا الصيغ الوجودية المثبتة الثلاث سنحصل على:

¬ Vك ٨ ¬ل V V(ك ٨ ¬م V ك ٨ ¬ل ٨ م V ك ٨ ل ٨ ¬م).

وتغدو هذه الصيغة، عندما نعبر عنها بصيغة الشرط الوجودي، كالآتي:

Vك ٨ ¬ل ← V(ك ٨ ¬م V ك ٨ ¬ل ٨ م V ك ٨ ل ٨ ¬م).

حاصل القول، إنَّ هذه النتيجة صحيحة حسب الاختبار (4). ويبيّن الفحص الانتقائي فعلًا أن «ك ٨ ¬ل» تستلزم «ك ٨ ¬م V ك ٨ ¬ل ٨ م V ك ٨ ل ٨ ¬م».

ولنضرب مثالًا آخر:

¬Vك ٨ ¬ل ٨ م. ٨ Vك← Vل . V Vك ٨ ¬ل.

فإذا ترجمنا الشرط إلى الفصل والنفي، حصلنا على ما يلي:

¬Vك ٨ ¬ل ٨ م . ٨ ¬ Vك V Vل . V Vك ٨ ¬ل.

وهي الصيغة التي توزع إلى صيغة قانونية وصلية على النحو التالي:

¬Vك ٨ ¬ل ٨ م V Vك ٨ ¬ل ٨ ¬Vك V Vل V Vك ٨ ¬ل.

لنعبر عنها في صيغة وصل للشرطيات الوجودية، كالآتي:

Vك ٨ ¬ل ٨ م ← Vك ٨ ¬ل ٨. Vك ← V(ل V ك ٨ ¬ل).

هنا يطبق القانون (5)، ويجب أن نثبت أن الشرطين صحيحان، لكي نحكم على العبارة برمتها بأنها صحيحة. بيد أن الشرطين صحيحان بموجب (4) لأننا نلاحظ عبر الفحص الانتقائي أن «ك ٨ ¬ل V م» تستلزم «ك ٨ ¬ل» و«ك» تستلزم «ل V ك ٨ ¬ل».

إن طريقة البتّ في الصحة، بالطبع في الوقت نفسه، طريقة للبت في

الاتساق واللزوم والتكافؤ ما دام عدم الاتساق واللزوم والتكافؤ هي، على التوالي، صحة النفي والشرط والتشارط.

يتم إجراء اختبار الصحة الذي نتوفّر عليه حاليًا، إذا جاز القول، عبر ترجمة صورة عبارة بولية إلى وصل بين شرطين وجوديين صادقين أو كاذبين؛ لأن الصيغ المتناولة في (1) و(2) و(3) تُكافِئ تمامًا الشرطين الوجوديين الكاذبين بسبب المقدم أو التالي. هكذا يُمكننا أن نسمي هذه الطريقة بطريقة الشرطيات الوجودية.

توجد طريقة أخرى للبتّ في صحة صيغ العبارات البولية تعود إلى هربراند (Herbrand)، مسأسميها الطريقة الخلوية. تميل من الناحية العملية، إلى كونها أكثر مشقة من طريقة الشرطيات الوجودية، غير أن البساطة الكبيرة في صياغتها تدفعنا إلى ذكرها. إنها تُعمِل صيغًا وجودية خلوية. تكون لصيغة وجودية خلوية مكوَّنة من ن من الأحرف «ك»، «ل»، إلخ، كصيغة للحد فقط وصلًا لـ ن من الأحرف وَفقًا للترتيب الأبجدي، بحيث يكون كل واحد منها إمّا أحد الأحرف المعنية وإمّا نفيه. هكذا تكون الصيغ الوجودية الخلوية لـ «ك» هي «V ك» و«V ¬ك»؛ وصيغ «ك» و«ل» هي «Vك٨ ل»، و«Vك ٨ ¬ل»، و«V ¬ك ٨ ل»، و«V ¬ك ٨ ¬ل»، وأما صيغ «ك»، و«ل»، و«م» فهي «Vك ٨ ل ٨ م»، و«V ك٨ ل ٨ ¬م»، بالإضافة إلى ست صيغ أخرى، وهكذا دواليك. تمثل كل صيغة من هذه الصيغ خليّة تامة من رسم جون فين المطابق لها، وتقول بوجود شيء ما بداخلها.

لِنُشِرْ كذلك إلى أن كل صورة وجودية بولية، ولتكن مكونة من ن من الأحرف، يُمكن أن نحوّلها إلى فصل من الصيغ الوجودية الخلوية المكوَّنة من هذه الأحرف النونية نفسها. وذلك وفق الطريقة الآتية: هب أن لدينا صيغة وجودية، لنحول حدها إلى صيغة قانونية فصلية مطوَّرة (انظر الفصل العاشر) ولنوزع «V» على الفصل. مثال ذلك، هب أنَّ لدينا: «V[¬ك ٨ (ل

V م)]»، نبدأ بتحويل حدها إلى صيغة قانونية فصلية، فنحصل على «V (~ك ∧ ل V ~ك ∧ ل)» ثم نطوّرها فنحصل على:

V(~ك ∧ ل ∧ م V ~ك ∧ ل ∧ ~م V ~ك ∧ ل ∧ م V ~ك ∧ ~ل ∧ م)،

أو بحذف التكرار،

V(~ك ∧ ل ∧ م V ~ك ∧ ل ∧ ~م V ~ك ∧ ~ل ∧ م).

فإذا وزعنا «V» نحصل في الأخير على ما يلي:

V ~ك ∧ ل ∧ م V V ~ك ∧ ل ∧ ~م V V ~ك ∧ ~ل ∧ م.

حاصل ما سلف أنَّ كل صيغة وجودية بولية عا، ولتكن من ن من الأحرف، يُمكن التعبير عنها بواسطة دالة صدقية لصيغ وجودية خلوية مُكوَّنة من هذه الأحرف نفسها. ندمج، عبر إجراء تحويل مبتذل، المجموعة ن من الأحرف في كل صيغة وجودية تظهر في عا. يكفي أن نضيف، في الحقيقة، إذا لم تكن صيغة وجودية تتضمن «م»، «مV ~م» إلى صيغة حدِّه بواسطة الوصل. بعد ذلك، نستعمل طريقة الفقرة السابقة، ونعمل على جعل كل صيغة وجودية عبارة عن فصل لصيغ وجودية خلوية مكونة من ن من الأحرف.

وبذلك لن يكون اختبار الصحة الذي يفترض أن يصاغ ببساطة سوى ما يلي:

(6) تكون دالة صدقية لصيغ وجودية خلوية مكوَّنة من ن من الأحرف المعطاة صيغة لعبارة بولية صحيحة إذا وفقط إذا أمكن ردها إلى «ص» بالنسبة إلى كل الاستنادات «ص» و«ك» لتلك المسماة صيغًا خلوية (بغض النظر عن إسناد «ك» إلى مجموعة $2^{ن}$ الصيغ الخلوية).

لن أقاطع عرضي بقصد البرهنة التامة على (6) لأنه من السهل إقرار استساغتها بواسطة التأمل التالي في خطاطات فين. عندما نشرع في تأويل

صيغة عبارة بولية، فإن المعلومة الوحيدة التي ستؤخذ في الحسبان بالنسبة إلى صدقها أو كذبها هي تلك التي ستقول لنا أية خلايا الخطاطة تكون مملوءة أو فارغة. علاوة على ذلك، إن تأويل خلية ما باعتبارها مملوءة أو فارغة لا يتوقف على تأويل باقي الخلايا باعتبارها هي ذاتها مملوءة أو فارغة. وعليه إن الشيء الوحيد الذي يُمكن اعتباره في شأن صحة صيغة عبارة بولية، عندما تتحول هذه الصيغة إلى صيغ وجودية خلوية، هو حقًا البنية الصدقية الخارجية التي يتم بواسطتها إنشاء هذه الصيغ انطلاقًا من الصيغ الوجودية الخلوية المعنية (استثناء: نظرًا لكوننا اخترنا تعريف الصحة دون اعتماد المجال الفارغ، فقد أضفنا الاستثناء الذي وضعنا بين هلالين إلى (6)).

مثال ذلك: Vك ٨ ل V Vك ٨ م .← V[ك ٨ (ل V م)]. أولًا نضيف الأحرف التي تنقص في كل صيغها الوجودية:

V[ك ٨ ل ٨ (م V ـم)] V V[ك ٨ م ٨ (ل V ـل)] . ← V[ك ٨ (ل V م)].

ثم نحول الحدود إلى صيغة قانونية مع الحفاظ على الترتيب الأبجدي:

V(ك ٨ ل ٨ م V ك ٨ ل ٨ـم) V V(ك ٨ ل ٨ م V ك ٨ ـل ٨ م).
← V(ك ٨ ل V ك ٨ م).

عندئذٍ نُطوّر الحدود مع الحفاظ دائمًا على الترتيب الأبجدي وحذف التكرار.

V (ك ٨ ل ٨ م V ك ٨ ل ٨ ـم) V V(ك ٨ ل ٨ م V ك ٨ ـل ٨ م)
. ← V(ك ٨ ل ٨ م V ك ٨ ل ٨ ـم V ك٨ ـل ٨ م).

ثم نوزّع «V»:

Vك ٨ ل ٨ م V Vك ٨ ل ٨ ـم V V ك ٨ ل ٨ م V ك ٨ ـل ٨ م .
← V ك ٨ ل ٨ م V Vك ٨ ل ٨ ـم V Vك ٨ ـل ٨ م).

هكذا تصبح الصحة الصدقية مرئية.

إن اشتراط الترتيب الأبجدي في تعريف الصور الوجودية الخلوية ليس مجرد اقتصاد في العمل، بل أساسي في تصحيح (6). فلو كتبنا في مثالنا «Vك ∧ ل ∧ م» في بعض المواضع و«Vك ∧ م ∧ ل» في مواضع أخرى، لضاعت الصحة الصدقية للبنية الخارجية؛ إذ كان من الممكن أن يعمل الجزآن «Vك ∧ ل ∧ م» و«Vك ∧ م ∧ ل» كما لو كانا حرفين قضويين مستقلين «ب» و«ج».

لمحة تاريخية: تعود الطريقة الأولى للبت في هذا المجال من المنطق إلى لوفنهايم (1915)، غير أن الطريقة الأولى التي كانت مرنة بشكل معقول تعود إلى بهمان (Behmann) (1922). تمثل طريقة الشرطيات الوجودية إلى حد ما تذكيرًا بطريقة بهمان؛ أما الطريقة الخلوية فتنسب بالأحرى إلى هيربراند (1930).⌊

تمارين

1. تحقق من صحة كل صيغة من الصيغ التالية بطريقة الشرطيات الوجودية.

   Vف ∧ ك ←. V(ك ∧ −ل V ف ∧ ل V ل ∧ م)،

   Vل ∧ ف ∧ Vل ∧ ق. ←. V(ك ∧ ل ∧ م V −ك ∧ ف V −م ∧ ق).

2. صُغ العبارة التالية وتحقق من اتساقها (عبر التحقق من صحة نفيها)، بواسطة طريقة الشرطيات الوجودية.

   بعض من يدرس المنطق واللاتينية، لا يدرسون الفيزياء واللغة اليونانية، لكن كل أولئك الذين يدرسون إما اللاتينية أو الكيمياء يدرسون المنطق واليونانية معًا.

3. لقد صُغنا خمسة استدلالات في التمرين 1 من الفصل 18. افحص كل صيغة على حدة عبر التحقق من صحة الشرطيات المقابلة بواسطة

طريقة الشرطيات الوجودية.

4. افحص بالطريقة نفسها الاستدلال الآتي:

لا أحد كان حاضرًا عدا آباء الممثلين

إذا كان كل آباء الممثلين قد شعروا بالملل، فإن لا أحد من آباء الممثلين يحب الحفلات المدرسية.

∴ إذا لم يكن أي أحد قد حضر من بين أولئك الذين يحبون الحفلات المدرسية، فإن بعض آباء الممثلين لم يشعروا بالملل.

5. أعد التمارين الأربعة مستخدمًا الطريقة الخلوية.

20 بعض خصائص جبر جورج بول

تُعتبَر صيغ الحدود لجروج بول دوال صدقية لأحرف الحدود، أي «ك» و«ك ∧ ل» و«ل V ك» و«ك ← ل» و«ك ↔ ل» وزد على ذلك عن طريق التكرار. تكون الصيغ الوجودية البولية صيغَ حدودٍ يتصدّرها الرمز «V». وتكون عبارات الصيغ البولية هي العبارات بمعية الدوال الصدقية للحدود. إن هذا الجرد الهزيل نافل كما نعلم: (¬ك ∧ ¬ل) ستستعمل بدل «ل V ك»، و¬(ك ∧ ¬ل) بدل «ك ← ل»، و«¬ (ك∧ ¬ل) ∧ ¬(¬ك ∧ ل)» بدل «ك↔ ل».

على العكس من ذلك، يُمكن تحقيق الملاءمة من خلال المزيد من التكرار. بالإضافة إلى «Vك» بدل «توجد بعض ك» نستطيع أن نتبنّى بشكل ملائم «Λك» «الكل ك»، «لا يوجد شيء سوى ك». وهناك ترميزات أخرى ملائمة من قبيل التضمن «ك ⊇ ل»، «كل ك هي ل»؛ وتساوي الماصدق، «ك ≡ ل»، «كل ك وفقط ك هي ل»؛ وترميز التضمن الخاص، «ك ⊃ ل»، «كل ك هي ل وليس العكس». يُمكن رد كل هذه الترميزات إلى الترميزات السابقة على النحو التالي:

Λك ↔ ¬V ¬ك.ك ⊇ ل .↔ Λ(ك ← ل) ↔ ¬V(ك ∧ ¬ل).

ك ≡ ل .↔ Λ(ك ↔ ل) ↔. ك ⊇ ل. ∧ ل ⊇ ك .↔. ¬V(ك ∧ ¬ل) ∧. ¬V(¬ك ∧ ل).

ك ⊃ ل .↔. ك ⊇ ل ∧. ¬(ل ⊇ ك) ↔. ¬V(ك ∧ ¬ل) ∧. V(¬ك ∧ ل).

لقد أشرنا في (3) من الفصل الثامن عشر أن السور «V» يتوزع على الفصل. وبالمثل يتوزع السور «Λ» على الوصل:

(1) Λك∧ ل ↔ . Λك ∧ . Λل.

إذا كانت صحة (1) أقل وضوحًا، فيمكن للمرء التحقق منها بترجمتها إلى الترميز السابق، كما أوضحنا للتو، ثم تطبيق طريقة الشرطيات الوجودية. وبالمثل بالنسبة إلى صحة هذا الشرط:

(2) Λك → Vك.

حيث الكلية والوجود المطلق يستلزم الوجود.

من الطبيعي والملائم تسجيل التكافؤات واللزومات بين صيغ العبارات من خلال وضع تشارطات وشرطيات صحيحة على النحو الوارد أعلاه. إنها لا تثبت بذاتها التكافؤ أو اللزوم، لكن صحتها تشكل التكافؤ واللزوم. هكذا، تقوم علامتا «≡» و«⊇»، تساوي الماصدق والتضمن، بالعمل نفسه لصورة الحد. إن كون «ك∧ ل» تُكافِئ «¬(¬ك ∨ ¬ل)»، وتستلزم «ك ∨ ل» ينعكس في صحة صورة العبارة المقابلة لتساوي الماصدق والتضمن:

ك ∧ ل ≡ ¬(¬ك ∨ ¬ل)،   ك ∧ ل ⊇ ك ∨ ل.

تصبح كلمة العامل، المُستورَدَة من النحو وذات المؤثل في المنطق، مفيدة في هذه المرحلة. إن العامل علامة تُربَط بتعبير أو أكثر من نمط أو أنماط نحوية معينة لإنتاج تعبير من نمط نحوي معين. وعلامة النفي عبارة عن عامل مرتبط بعبارة لإنتاج عبارة وبحد لإنتاج حد آخر. وعلامة الفصل وعلامة الشرط وعلامة التشارط عوامل تربط العبارات في أزواج لإنتاج عبارات وتربط الحدود في أزواج لإنتاج الحدود. «V» عبارة عن عامل متصل بحد لتكوين عبارة؛ وكذلك حال «Λ». وأخيرًا ، إن «⊇» و«⊃» و«≡» عبارة عن عوامل تربط الحدود لتشكيل العبارات. يُطلق على العوامل من هذا

النوع الأخير اسم الروابط: تعني «⊇»، على وجه الخصوص، «هي (هم)»[1]

من الواضح إذًا أن «ك ⊇ ل» و«ك ≡ ل» لا يتطابقان مع «ب ← ج» و«ب ↔ ج» بالطريقة التي تتطابق بها «ك∧ ل» و«ك∨ ل» مع «ب ∧ ج» و«ب∨ ج». ما يتطابق مع «ب ← ج» و«ب ↔ ج» بالطريقة التي تتطابق بها صيغتا الحد «ك∧ ل» و«ك∨ ل» مع «ب ∧ ج» و«ب ∨ ج» هما بالأحرى صيغتا الحد «ك ← ل» و«ك ↔ ل». لا يجب الخلط بين صيغتي العبارة «ك ⊇ ل» و«ك ≡ ل» مع صيغتي الحد «ك ← ل» و«ك ↔ ل»؛ بل إنهما مرتبطان بهما، كما رأينا، مثل «∧(ك ← ل)» و«∧(ك ↔ ل)».

إن منطق الحدود لجورج بول المعروض علينا الآن هو إلى حد كبير ما كان يُنظر إليه تقليديًا على أنه جبر الفئات ويسمى الجبر البولي. تستخدم الأحرف «ك» و«ل» وما إلى ذلك، الآن فقط كأحرف صورية تمثل حدودًا عامة، من وجهة النظر هذه، بدلًا من كونها تمثل أسماء الفئات، أو كمتغيرات تندرج ضمن الفئات. تفسح الرابطة «≡» الطريق وفق هذا التناول أمام الهُويّة البسيطة «=»: ذلك لأن الفئات تكون متطابقة عندما يكون لها العناصر نفسها. غالبًا ما تسود المعادلات بالفعل في الجبر البولي؛ إذ تسود النظرة الجبرية. وهكذا بدلًا من «∨ك» و«∧ك» نحصل على «ك ≠ ∧» و«ك = ∨» حيث يرمز «∧» للفئة الفارغة و«∨» لمجال القول. لم يعد القصد منطقًا خاصًا، بل النظرية الموضوعية للأشياء المجردة من نوع خاص، أي الفئات. يتزايد هذا الانفصال عن منطق دوال الصدق من خلال المزيد من التخلي عن الترميز: وبالتالي لا تكتب «ك ← ل» و«ك ↔ ل»، وبدلًا من الفصل «ك ∨ ل» والوصل «ك ∧ ل» للحدود نحصل على «ك ∪ ل» و«ك ∩ ل»، اللذين يدلّان على اتحاد وتقاطع الفئات.

بالتنازل عن هذا التخلي الأخير، قد نصف المعادلة البولية على أنها

---

(1) وهي رابطة لا توجد في اللغة العربية لا ظاهرة ولا مضمرة. [المترجم]

معادلة يكون كل طرف منها أحد الأحرف «Λ» و«V» و«ك» و«ل» وما إلى ذلك، أو تتألف منها بواسطة النفي والفصل والوصل.

تجدر الإشارة إلى أنه في الجبر العادي للأعداد، يُمكن تحويل كل معادلة إلى صيغة يكون أحد طرفها هو «0». مثل ذلك يحدث الآن في الجبر البولي إذ يُمكن تحويل كل معادلة إلى صيغة يكون فيها أحد طرفها هو «Λ». وذلك لأن «ك = ل» تعني أن الفئتين ك ول لهما العناصر نفسها؛ ومن ثَمَّ لا يوجد شيء في ك Λ ¬ل ولا في ¬ك Λ ل؛ ومن ثَمَّ: ك Λ ¬ل V ¬ك Λ ل = Λ.

وبالمثل نستطيع دائمًا، إذا استحسنا، أن نجعل أحد الطرفين هو «V»: مناط ذلك أن «ك =ل» تُكافِئ أيضًا: «ك Λ ل V ¬ك Λ ¬ل = V».

إنَّ صيغ الجبر البولي هي المعادلات البولية ودوال الصدق الخاصة بها. يُمكننا اختبار أي صيغة من هذا النوع للتحقق من صحتها عبر ترجمتها إلى صيغة بولية كما هو الحال في الفصل الثامن عشر واختبارها كما في الفصل التاسع عشر. لذلك دعونا نرَكيفية الترجمة. رأينا كيفية تحويل أي معادلة إلى الصورة «Λ =...»؛ ثم يُمكن ترجمة «Λ =» إلى «¬V». إذا كانت هناك تكرارات متبقية لـ «Λ» أو «V»، فيمكن البتّ فيها من خلال دوال الصدق بالطريقة «ك» و«ص» [قيم صدقية]، أو بطريقة أكثر غرابة، إعادة كتابتها كـ «ك Λ ¬ك» و«ك V ¬ل». هكذا تنتقل أي دالة صدقية للمعادلات البولية إلى دالة صدقية لمعادلات الوجود البولية، الجاهزة لأسلوب الفصل التاسع عشر.

هل يوجد أكثر من مجرد اختلاف في طريقة الترميز بين المنطق البولي للحدود الذي رأيناه في الفصلين الثامن عشر والتاسع عشر، وهذا الجبر للفئات؟ من الناحية الاسمية يوجد فرق بين «ك» عندما تمثّل حدًّا كليًّا و«ك» عندما تمثل اسمًا لفئة. هناك فرق بين الحد الكلّي «إنسان» أو «إنه إنسان» واسم الفئة «الإنسانية» (راجع الفصل الرابع عشر): فالحدُّ الكليُّ

يصدق على كل واحد من أفراد كثيرين، أي الناس، أما اسم الفئة فاسم لموضوع مجرد، أي فئة الناس. نستطيع بواسطة الحدّ الكليّ أن نتحدّث بشكل عام عن الناس دون أن نضع السؤال الفلسفي حول معرفة ما إذا كان يوجد، بالإضافة إلى مختلف الناس، موضوع إضافي هو فئتهم. يضع اسم الفئة، من جهته، هذا السؤال ويقترح جوابًا موجبًا عنه.

لا يعد مثل هذا السؤال لغوًا، إذ سنلاحظ في الفصل السادس والأربعين والسابع والأربعين أن التسليم بالفئات يُمكن أن يضيف جانبًا ماديًا إلى ما يُمكن أن نصوغه في نظرية ما، حتى عندما لا يكون ما نصوغه يتعلق بالفئات. وعليه إذا كان يهمّنا أن نقتصد في الوسائل وأن نأخذ في الحسبان الافتراضات الضرورية للبرهنة على شيء ما أو تعريفه، يجب أن ننتبه إلى الحضور المحتمل للفئات في جهاز النظرية: إذ أحيانا تحضر هذه الفئات وأحيانًا لا تحضر.

بيد أننا نظل أحرارًا، في حالة الجبر البولي، في أن نرفض كل تسليم بوجود الفئات فنعتبرها مجرد طريقة في الكلام، وذلك لأننا رأينا كيف أن ترجمة الجبر البولي إلى لغة المنطق البولي للحدود الكلية تكون أكثر براءة. وعندما يساهم افتراض وجود الفئات ماديًا في نظرية ما، ولا يُمكن رفضه على هذا النحو بسهولة، فإنه يُسلم بالفئات من بين الموضوعات التي تكون حدودها الكلية نفسها تصدق عليها. يتم التسليم بها كقيم لمتغيرات، حتى نستبق مفهومًا سنعود إلى تناوله في الفصل المقبل. وفي انتظار ذلك، بإمكاننا أن نعتبر في أفضل الأحوال الجبر البولي للفئات نظرية صغرى للفئات مصطنعة، وأسلوبًا مجازيًا لجعل ما ليس في الواقع سوى المنطق البولي للحدود الكلية.

تُسمّى الفئات أيضًا المجموعات. ويرجع فرع نظري من فروع الرياضيات النظرية المسمى بنظرية المجموعات إلى مؤلّف كانتور (Cantor) (حوالي

1890) الذي يهتم في جزء كبير منه بمشكلات اللاتناهي، ويتناول الفئات من منظور واقعي لا يُمكن بأي حال من الأحوال استبعاده على غرار الجبر البولي للفئات باعتباره مجرد طريقة في الكلام، سنلقي نظرة خاطفة عليه في الفصول 46-48. في هذا الجو النقي يستحسن استعمال مصطلح «المجموعة» بدل «الفئة»، إلا في سياق تقني معين (انظر الصفحات الأخيرة من الكتاب) حيث نستعمل المصطلحين معًا لتعيين تمييز خاص.

في «الرياضيات المعاصرة» الحالية للمدارس الابتدائية، يتم تطبيق الاسم المبجل لنظرية المجموعات بشكل مربك على الطرف الآخر من السلم: على الجبر البولي للفئات، ومن ثم حقا على المنطق البسيط للحدود الكلية.

لمحة تاريخية: تم اشتقاق علامتي التضمن «⊂» و«⊇» الشائعة حاليًا في نظرية المجموعات من استخدام جيرغون (Gergonne) في عام 1816 للرمز «C» للدلالة على الاحتواء (containment). أسس جورج بول الجبر البولي للفئات سنة 1847 وطوّره دي مورغان وجيفونس (Jevons) سنتي 1858 و1864. ويعود السبق في جانب منه إلى لايبنتس في القرن السابع عشر. يوجد بالطبع بين هذا المنطق ومنطق الدوال الصدقية الذي يعتبر رواده أقدم (انظر الفصل الثاني) توازيات واضحة انتبه إليها من قبل لايبنتس وبول. غير أنَّ العلاقة التامة بين منطق الدوال الصدقية والجبر البولي للفئات لم تكن حينها واضحة بقدر ما أضحت عليه لاحقًا كما هو الحال مثلًا مع بيهمان (1927). تنعكس العلاقة بالطريقة الأكثر وضوحًا بواسطة منطق الحدود في الفصلين الثامن عشر والتاسع عشر السابقين، إذ يضع الفئات جانبًا.

تمارين

1. ترجم الصيغ التالية إلى صيغ بولية بالمعنى المحدد في الفصلين 18 و19، وتحقق من صحتها عن طريق الشرطيات الوجودية.

ك = ك ∨ ل ∨ م .←. ك = ل ∨ م،

ك ∨ ¬ل = ل .←. ك = ل،

ك = ك ∨ ل .↔. ك ∧ ل = ل،

ك ∧ ل = ك ∨ ل .↔. ك = ل.

2. أعد صياغة طريقة الشرطيات الوجودية كطريقة في البتّ تنطبق مباشرة على الدوال الصدقية للمعادلات البولية (تمرين صعب).

21 المتغير المُقيَّد

يمكن اعتبار الحدّ الكليّ، كما لاحظنا في الفصل الرابع عشر، دون تمييز مفردًا أو جمعًا، فاعلًا أو صفة أو فعلًا. إن هذه الصلاحية جهدة بكل تأكيد، لكننا نستطيع فعل المزيد. نود أن نتمكّن من تناول كل عبارة تحيل على موضوع باعتبارها تحمل على هذا الموضوع حدًّا كليًّا، حتى عندما تكون العبارة مركبة ولا تضم أي حد كلي منفصل بوضوح وصالح لهذه الغاية. لقد سبق أن أظهر التمرين المختصر في الفصل الرابع عشر، التلاعبات اللغوية التي كانت ضرورية لفصل الحدود المناسبة، في العديد من الأمثلة من قبيل:

(1) اعتاد طوم العمل مع الرجل الذي قتل الزوج الثاني لأصغر إخوة طوم،

يعتبر إيجاد حدٍّ كليّ يكون له، عندما يحمل على طوم، التأثير نفسه تحدّيًا. نحصل في الأخير على:

(2) المستخدم السابق لقاتل الزوج الثاني لأصغر إخوته.

توفر اللغة العادية بالفعل وسيلة عامة لمثل هذه الحالات: الجملة الموصولة. يتم تحقيق الغرض من (2)، تقريبًا جدًّا، من خلال ما يلي:

(3) الذي كان يعمل مع الرجل الذي قتل الزوج الثاني لأخته الصغرى.

تكمُن المشكلة الجديدة في تقاطع الإحالة لـ«له»: التي يوصلها القرب إلى «الذي» الخاطئة. تُدخلُنا مشكلات تقاطع الإحالة في إعادة الصياغة المزعجة، كما نعلم جيّدًا. ومع ذلك، هناك استخدام شبه رياضي غير أنيق يتخطى كل ذلك. إنه صياغة «بحيث إنّ»، مع متغير داعم يحل محل الضمير:

(4) سـ بحيث إن مـ يعمل لصالح الرجل الذي قتل الزوج الثاني للأخت الصغرى لـ سـ

أو بصيغة أطول،

(5) سـ بحيث إن سـ كان يعمل مع الرجل عـ بحيث إن عـ قتل الزوج الثاني للأخت الصغرى لـ سـ

إن «سـ» و«عـ» هنا متغيّران مقيّدان: مجرد وسيلتين للإحالة الضميرية. ينبغي الاختيار المتعدد للأحرف لتجنب التباس الإحالة عندما، كما في (5)، تكون الجُمل الموصولة متداخلة.

هكذا يكون لدينا في الجملة الموصولة، التي تصاغ بـ «الذي» أو «التي» أو «ذا» أو «سـ بحيث إن»، حدًّا كليًّا يفصل ما قالته الجملة الأصلية عن الموضوع المعني. إنّ حمل ذلك على الموضوع يُكافِئ الجملة الأصلية. «طوم (شخص ما) يستمتع بالموسيقى» تعادل «طوم يستمتع بالموسيقى»؛ «طوم (شخص ما) سـ بحيث إن سـ كان يعمل إلخ» تعادل (1). إن إدراج كلمة «شخص ما» هنا مجرد استجابة للقواعد النحوية، وتعديل جملة نعتية في موضع الاسم.

في صياغة جملة وصلية أو جملة «بحيث إن» ، نَفْصل ونجرِّد. في (2) - (5) يتم فصل ما تقوله (1) عن طوم عن اسم «طوم» ويُجرَّد من الجملة (1). ومن ثَمَّ فإنّ ما نُجرِّده هو حدٌّ كليّ. لا يوجد تفكير هنا في موضوع مجرد. قد تصدق الجملة التي تم تجريدها، مثل أيّ حدٍّ كليّ، على أي عدد من المواضيع من أي نوع. سنسعى لاستيعاب المواضيع المجرّدة مباشرة كما قد تكون لفترة وجيزة فقط في نهاية الكتاب.

ستصير الصياغة «سـ بحيث إن ... مـ ...» في ما يلي: «{سـ:... سـ ...}» فتُسمّى تجريد الحد. سيطلق على الحد الكلي المركب الذي تمّت صياغته على هذا النحو اسم المُجَرَّد. مثلما يثبت حمل (4) على طوم ببساطة (1)،

كذلك الحال بشكل عام:

(6) {سـ:...سـ... } ∧ عـ ↔ ...عـ....

إن مثل هذا الاختزال للحمل «{سـ:... سـ ... } ∧ عـ» إلى «... عـ ...» أدعوه التشخيص. عندما تكون العبارة التي قمت بتمثيلها على النحو الآتي: «...سـ ...» مجرد حمل بسيط، هب أنَّ «سـ حكيم» ، لا يصبح المجرد سوى تكرار لـ «حكيم» نفسه:

{سـ: سـ حكيم } ≡ حكيم

ومِن ثَمَّ:

(7) {سـ: ك (سـ)} ≡ ك، {سـ: ك (سـ)} ∧ عـ ↔ ك (عـ).

لقد عادت علامة «سـ» التي ظهرت لفترة وجيزة في (1) من الفصل الثامن عشر لتبقى. إنّه المتغيّر المقيّد لتجريد الحد؛ لكن دعونا نكون أكثر دقة. إنه مقيد في المُجرّد «{سـ: سـ حكيم}»، مقيّد بالبادئة «سـ:»، ولكنه مطلق في مكون التعبير «سـ حكيم» المأخوذ في حد ذاته. يسمى هذا التعبير عبارة مهملة. وهي تختلف عن العبارة المحصورة، أو القضية، من حيث احتوائها على متغير مكان اسم. إنها ليست صادقة ولا كاذبة. إن مثيل المتغير المطلق في اللغة العادية هو ضمير لا يتم التعبير عنه أو فهمه بالسوابق النحوية، ومثيل العبارة المهملة هي جملة تحتوي على مثل هذا الضمير التابع.

ونظرًا لأنَّ التجريد في متناولنا، يُمكن عرض علاقة الدوال الصدقية للحدود بالدوال الصدقية للعبارات من جديد بوضوح:

(8) ¬ك ≡ {سـ: ¬ك(سـ)}،

(9) ك ∧ ل ≡ {سـ: ك(سـ) ∧. ل(سـ)}،

(10) ك ∨ ل ≡ {سـ: ك(سـ) ∨ ل(سـ)}،

(11) ك ← ل ≡ {سـ: ك(سـ) ← ل(سـ)}،

(12) ك ↔ ل ≡ {سـ: ك(سـ) ↔ ل(سـ)}

بدل التعبير عن الحمل بواسطة الاقتران، كما هو حال «ك(سـ)»، سأستعمل أحيانًا حرف إيبسيلون (∋) كرابطة -خصوصًا في علاقة مع المجردات: وهكذا تصبح (6) كالآتي:

(13) ع ∋ {سـ:...سـ... } .↔ ...ع....

إذا كانت الروابط «⊇» و«⊂» و«≡» تُقرِن بين الحدود الكلية، فإن الرابط «∋» يُقرن الحد الشخصي بالحدّ الكليّ؛ وذلك لأنَّ المتغيرات تعمل نحويًا مثل الحد الشخصي. يحل الرابطان «∋» و«⊇» محل «هو» و«هم».

ينسب المجرد وحرف الإبسيلون الخاصة به إلى نظرية المجموعات. يعبّر عن فئة كل المواضيع سـ بحيث إن ... سـ ... في نظرية المجموعات بـ {سـ:... سـ ... }، ويعبر عن انتماء العنصر بحرف إبسيلون. إن تبنيَّ لهذه الترميزات إلى الجملة الموصولة البريئة أنطلوجيًا والرابطة جزء يقترن باستعمالي الأنطلوجي البريء للصُّوْرنة البولية التي كانت مثقلة بلا مبرر بعبء الفئات على مر السنين.

سيشعر بعض القراء أنّه من الأفضل لي أن أترجم هنا تجريد الحد بعلامة مميزة «∈» بدل «بحيث إنّ»، كما أفعل وآخرون أحيانًا، ونترك «{سـ:... سـ ...}» و«∋» لنظرية المجموعات التي لا فائدة ترجى منها. لقد اكتشفَتْ حاليًا أنه من المفيد فلسفيًا أكثر ومن الأليق منطقيًا أكثر استعمال الترميز نفسه لهما معًا. عندما يحين الوقت لتناول نظرية المجموعات والاعتراف بالفئات كمواضيع (الفصول 46-48)، ستستخدم الحدود الكلية لمهمة مزدوجة باعتبارها أسماء للفئات. وسيُلخِّص تجريد الحد حينئذ بين الفينة والأخرى العمل المعتاد لتجريد الفئات.

لمحة تاريخية: باعتبار إبسيلون الحرف الأول من اللغة اليونانية، فقد تم تبنّيه بالنسبة إلى الرابطة المفردة من قبل بيانو سنة 1889. وعَكّسه بالنسبة إلى «بحيث إنّ» الخاصة بتجريد الحد بسبب كيفية حذفهما

لبعضهما البعض. انظر (13). يستخدم رمز بيانو «∋» عالميًا اليوم للدلالة على انتماء العناصر. في حين أن رمزه «∈» يستعمل في الوقت الحاضر بدلًا من «بحيث إنّ» غير الإلزامية الخاص بتجريد الحدّ. وعادة بشكل غير رسميّ. استخدم بيانو الحرف «∋» لكل من الرابطة والانتماء، و«∈» لكل من تجريد الحد وتجريد الفئة. ما أكثر ما أجازف بفعل ذلك - على الرغم من أن استعماله كان حالة خلط حقيقي. استخدم راسل في عام 1908 ترميزًا يعتمد علامة شدة منحنية بشكل لا لبس فيه لتجريد الفئات واستمر خلال مبادئ الرياضيات (Principia Mathematica) والعديد من الأدبيات اللاحقة، بما في ذلك الطبعات الأولى لهذا الكتاب. إنَّ ترميز الحاضنات التي أستخدمها الآن معتاد حاليًا في نظرية المجموعات.

عند صياغة غودل نظرية المجموعات في عام 1940، اعتمد بشكل غير رسمي المواضيع التكميلية الخيالية التي سمّاها المفاهيم. لقد كانت مثل الفئات لكنها لم تكن قيمًا للمتغيرات. كانت مجرد طريقة في الكلام، يُمكن تجنبها عن طريق الإطناب. خلال محاضراتي في البرازيل عام 1942 قمت بالضغط على هذا الخيال. فقدَّمت ما أسميته النظرية الافتراضية للفئات والعلاقات، والتي استُخدِمت فيها ترميز نظرية المجموعات بقدر ما أستطيع دون افتراض الفئات. انظر معنى المنطق الجديد، الفصل 51. كان مارتن (Martin) يحثُّ على الفكرة في الوقت نفسه. وفي نظرية المجموعات ومنطقها، (1963-1967) استخدمت على نطاق واسع النظرية الافتراضية للفئات باعتبارها مساعدة للنظرية الحقيقية للفئات. لقد أثبتت أنها مساعِدة قيّمة، لكنني ثابرت على تقديمها باعتبارها مجرد مقدمة لنظرية لمجموعات وكمحاكاة جزئية خبيثة لها، وفشلت، كما فعلنا جميعًا، في إدراك أنها يجب أن تكون رديفًا مباشرًا للمنطق الأوّلي باعتبارها نظامًا صارمًا لسمة أساسية في اللغة، أقصد الجملة الموصولة.

22 التسوير

لقول إنَّ كل إنسان فان، وأن بعض الكتب مملة، نستطيع أن نكتب:

(1) Λ {سـ: سـ إنسان ← سـ فان}،

(2) V {سـ: سـ كتاب.Λ سـ ممل}.

إن تطبيق العاملين «Λ» و«V» على مجردات الحدود بهذه الطريقة يثبت أنه استراتيجي. يُمكن متابعة المنطق دون استخدام المجردات بخلاف ما بعد «Λ» و«V». والعكس صحيح أيضًا: لا حاجة أبدًا إلى «Λ» و«V» إلّا في التطبيق على مجردات الحدود، حيث يُمكن، بناء على (7) من الفصل السابق، ترجمة «Λك» و«Vك» دائمًا إلى: «Λ {سـ: ك(سـ)}» و«V {سـ: ك(سـ)}». باختصار، يُمكن التعامل مع التراكيب «Λ {سـ:» و«V{سـ:»، وكذلك «Λ {عـ:» و«V{عـ:» وهكذا دواليك، في ما بعد كبادئات بسيطة. سأفعل ذلك، وأختصرها إلى «Λسـ» و«Vسـ» و«Λعـ» و«Vعـ» إلخ. فتصبح (1) و(2) تسويرات:

(3) Λسـ { سـ إنسان ← سـ فان}،

(4) Vسـ { سـ كتاب Λ. سـ ممل}.

تعتبر البادئات «Λسـ» و«Vسـ» و«Λعـ»، إلخ، المسماة أسوارًا، النقطة المحورية للمنطق الكلاسيكي الجديد.

تبرز العلاقات المذكورة في الفصل العشرين بين «Λ» و«V» الآن مرة أخرى بين التسويرات:

Λسـ ~ك (سـ) ↔ ~Vسـ ك(سـ)، Vسـ ~ك(سـ) ↔ ~Λ سـ ك(سـ)،

Λ سـ ك(سـ) ← Vسـ ك(سـ).

عندما ننتقل إلى أسلوب التسوير، نتخلّى عن المكوِّنات البولية «¬ك» و«ك∧ل» و«ك∨ل» و«ك→ ل» و«ك↔ ل»: إنها تدخل ضمن مجرّدات الحد كما في (8)-(12) من الفصل السابق وتختفي في التسويرات. وهكذا تتوقف أحرف الحد عن الظهور ما عدا مع متغير ملحق بها: «ك(س)»، «ل(س)»، «ك(ع)»[1]. من الآن فصاعدًا، يُمكننا اعتبار هذه التراكيب تمثيلاً لعبارات غير محللة ككل. تشير «ك(س)» إلى أي جملة مهملة تحتوي على «س» مطلق كامن في أي مكان بداخلها، ربما في عدة أماكن، كما كان «جون» في (1) من الفصل الواحد والعشرين، ولا نحتاج إلى التفكير في فصل حد تمثله «ك» بحد ذاتها. إذا فكرنا في ذلك، فيمكننا دائمًا إعادة تنشيط تجريد الحد: إن الحد هو (4) من الفصل الواحد والعشرين.

حتى الآن لم يكن الانتقال إلى التسوير تحسينًا. على العكس من ذلك، إنَّ الصور البولية كما هي في الفصلين الثامن عشر والتاسع عشر أبسط وأكثر وضوحًا، وغير مُثقَلة لا بمُجرّدات الحد ولا بالأسوار. لدينا اختبارنا للصحة بواسطة الشرطيات الوجودية، ولم يتبقَّ سوى القليل مما نرغب فيه- حتى ننتقل من الحدود المطلقة أو الواحدية مثل «كتاب» إلى الحدود النسبية أو الاثنانية مثل «عم». إن هذا الانتقال هو الذي يعقِّد المنطق ويجعل من منزلته موضوعًا جادًّا. واستعدادًا لذلك فقط ننتقل الآن إلى الأسوار. لكن سيكون لدينا خمسة فصول حولها قبل أن نتناول الحدود الاثنانية التي نريدها في نهاية المطاف.

تمثل (3) و(4) من الفصل الرابع عشر ترجمة تسويرية للأشكال الحملية ك.م وج.م؛ وتماثلهما ك.س وج.س بشكل واضح. وهو ما نعبّر عنه باختصار:

(1) تمييزًا للحرف المحمولي «ك» عن المتغير الشخصي «س»، وخوفًا من التصاق الحرفين سنضع المتغير الشخصي بين هلالين كالآتي: «ك(س)». [المترجم]

ك.م: كل ك هي ل
Λسـ (ك(سـ) ← ل(سـ))

ك.س: لا ك هي ل
Λسـ (ك(سـ) ← ¬ل(سـ))

ج.م: بعض ك هي ل
Vسـ (ك(سـ) . Λ ل(سـ))

ج.س: بعض ك ليست ل
Vسـ (ك(سـ) . Λ ¬ل(سـ))

لتثبيط القراءة المغلوطة لـ «Vسـ (ك(سـ) ← ل(سـ))» الخاصة بـ ج.م بشكل نهائي، دعونا نتوقف عن رؤية ما تقوله «Vسـ (ك(سـ) ← ل(سـ))» حقًّا. تتكافأ «ك(سـ) ← ل(سـ)» مع «¬ك(سـ) V ل(سـ)». وعليه تقول «Vسـ (ك(سـ) ← ل(سـ))» فقط إنه على الأقل موضوع واحد ليس-ك أو ل: وهو ما يصدق بالضرورة بغض النظر عن كيف نؤوّل «ك» و«ل». ما عدا في الحالة القصوى حيث تصدق «ك» على كل شيء في مجال القول وتصدق «ل» على لا شيء. وهكذا فإن الصيغة «Vسـ (ك(سـ) ← ل(سـ))» نادرًا ما تكون كاذبة لدرجة أنها نادرًا ما تستحق الإثبات.

تتصف اللغة الطبيعية بخاصية غريبة تتجلّى في نحو الكلمتين: «كل شيء» وشيء ما» اللذين يعملان كما لو كانا اسمين ما عدا في الأمور الحاسمة. فالعبارتان:

ماود كتاب وهو ممل،

ماود كتاب وماود ممل

مثلًا، قابلتان للتبادل بشكل جيد، كما هو حال:

ماود نثر أو شعر،

ماود نثر أو ماود شعر:

في حين أنّ العبارتين:

(5) شيء ما مربع ودائري،

(6) شيء ما مربع وشيء ما دائري

تحوزان قيمتي صدق متقابلتين، مثلما تفعل هاتين العبارتين:

(7) كل شيء مرئي أو غير مرئي،

(8) كل شيء مرئي أو كل شيء غير مرئي.

هكذا تتضح أهمية المدى في التسوير. يمتد مدى السور الأولي في الصيغتين «Vسـ (ك(سـ) . Λ ل(سـ))» و«Vسـ (ك(سـ) V ل(سـ))» إلى النهاية؛ في حين يقتصر في الصيغتين «Vسـ ك(سـ) . Λ Vسـ ل(سـ)» و«Λسـ ك(سـ) V Λسـ ل(سـ)» على نصف الصيغة. إن الأمر مهم في هذه الحالات. وفي الحالات المقابلة يكون الأمر غير مهم: يكون التسوير الوجودي توزيعيًا على الفصل ويكون التسوير الكلي توزيعيًا على الوصل.

(9) Vسـ (ك(سـ) V ل(سـ)) ↔. Vسـ ك(سـ) V Vسـ ل(سـ)،

(10) Λسـ (ك(سـ) . Λ ل(سـ)) ↔. Λسـ ك(سـ) . Λ Λسـ ل(سـ)

للتعبير عن ذلك يكفي استحضار (3) من الفصل الثامن عشر و(1) من الفصل العشرين على ضوء (9) و(10) من الفصل الواحد العشرين.

تتطلب عبارات اللغة الطبيعية، التي تبدو للوهلة الأولى في صيغة وصليات أو شرطيات، دائمًا تأويلها بوصفها تسويرات الوصليات أو الشرطيات. من الأمثلة على ذلك:

(11) سرقت سادي شيئًا ما من المحل التجاري واستبدلته بقميص.

(12) إذا أرادت سادي شيئًا ما فإنها تعمل ما بوسعها للحصول عليه.

يجب أن نؤوّل العبارتين كتسويرين:

(13) V سـ (سرقت سادي سـ من المحل التجاري .Λ استبدلت سادي بقميص سـ)،

(14) Λسـ (تريد سادي سـ ← تعمل سادي ما في وسعها للحصول على سـ)،

عوض تأويلهما كوصل وشرط:

(15) Vسـ (سرقت سادي سـ من المحل التجاري) ∧ استبدلته سادي بقميص.

(16) Vسـ (تريد سادي سـ) ← تعمل سادي ما في وسعها للحصول عليه.

تحيل الهاء في «استبدلته» في (11) بوضوح على «و» و«شيئًا ما». وبالمثل تحيل الهاء في (12) على «شيئًا ما». ينبغي أن تحتضن الأسوار المكوِّن برمته كما هو الحال في (13) و(14). بدل أن تقتصر على الجملة الأولى فقط كما هو الشأن في (15) و(16). بحيث نحصل على تكرار عازل لـ «سـ» بصيغة الضمير «ه».

لو افترضنا أن مجال القول محصور في مجموعة متناهية من المواضيع عـ. غـ .... ن. فإننا نستطيع أن نعبر عن الأسوار الوجودية بالفصليات والأسوار الكلية بالوصليات: فنعبر عن كل من «Vسـ ك(سـ)» و«∧سـ (ك(سـ)» على التوالي:

ك(ع) V ك(غ) V.... V ك(ن)، ك(ع) .∧ ك(غ) ∧. .... . ∧ك(ن).

فيبرز الفرق بين (5) و(6) عندئذ بوضوح تام: إذ تصبح الصيغة «Vسـ (ك(سـ). ∧ ل(سـ))» كالآتي:

ك(ع) .∧ ل(ع) .V. ك(غ) .∧ ل(غ) .V. ... .V. ك(ن) .∧ ل(ن)،

في حين أن الصيغة Vسـ ك(سـ). ∧ Vسـ ل(سـ) تصبح كالتالي:

ك(ع) V ك(غ) V.... V ك(ن). ∧ ل(ع) V ل(غ) V. ... V ل(ن).

وبذلك يظهر الفرق بين (7) و(8) بالوضوح نفسه. علاوة على ذلك، تبدو قابلية المبادلة بين «¬∧سـ». و«¬Vسـ» وبين «Vسـ¬» و«∧¬سـ» كتطبيق بسيط لقانوني دي مورغان (الفصل العاشر): لأنَّ كلًّا من «¬ ∧سـ ك(سـ)» و«Vسـ ¬ك(سـ)» يصبحان على التوالي:

¬ (ك(ع) . ∧ ك(غ) .∧. .... .∧ ك(ن))، ¬ك(ع) V ¬ك(غ) V ... V ¬ك(ن)،

كما تصبح كلٌّ من «⌐Vسـ ك(سـ)» و«Λسـ ⌐ك(سـ)» على التوالي:

⌐(ك(ع) V ك(غ) V ... V ك(ن))، ⌐ك(ع) .Λ ⌐ك(غ) Λ. ... .Λ ⌐ك(ن).

يبدو، إذًا، أننا نستطيع أن نستغني تمامًا عن الأسوار لصالح الدوال الصدقية إذا أردنا قبول، في كل الأحوال، مجال قول ثابت ومتناهٍ ومحدود: ع، غ، ...، ن. لكننا لا نريد ذلك؛ إذ من الملائم أن نسمح بالتنويع في اختبار مجال القول. ولا ترجع هذه الملاءمة إلى كون الفلاسفة غير متفقين في شأن حدود الواقع فقط، بل لأنه يُمكن تبسيط، كما أشرنا إلى ذلك، بعض الأدلة المنطقية أيضًا عبر الحصر الإرادي لمجال القول في الحيونات، أو لنقل في الأشخاص، أو في مستخدمي شركة معينة بالنسبة إلى مجال المشكلة الموضوعة. علاوة على ذلك، يتضمن المجال المعني، في معظم المشكلات، مواضيع لا نستطيع جردها على منوال ع، غ،...، ن. فالمجال المناسب، بالنسبة إلى العديد من المشكلات، يشمل حتى المواضيع اللامتناهية كالأعداد الصحيحة مثلًا. ولهذا يكون من اللازم أن نبقي التسوير هنا.

لمحة تاريخية: كان فريغه أول من أدخل التسوير سنة 1879، بترميز يماثل بنيويًا ما عرضناه هنا. أما الترميز الذي نستعمل هنا «(سـ)» و«(∀سـ) فيعود إلى راسل سنة 1908. ورد هذا الترميز في كتابه مبادئ الرياضيات وفي الأدبيات اللاحقة وفي الطبعات السابقة من هذا الكتاب. وفي الوقت نفسه، اكتسب الزوج الأكثر تناظرًا «∀سـ» و«∃سـ» شعبية. يحوز هذا الترميز الأخير ميزة تكمُن في أنه يُمكن استخدام «∀» بشكل منفصل مع «∃»، كما في الفصل العشرين. غير أن بعض المؤلفين المحدثين الذين يرغبون في التأكيد على تشبيه السورين بالوصل والفصل استخدموا المتغيرات المكبرة «Λ» و«V» لعلامتي الوصل والفصل بدلًا من «∀» و«∃»[1].

(1) وهو ما استحسناه في ترجمتنا إذ فضلنا استعمال الرمزين «Λ» و«V» بدل«∀» و«E» على =

تمارين

1. أعد كتابة ما يلي مستعينًا بالأسوار:

لا يستطيع جون أن ينتصر على أي عضو في الفريق.

لا يستطيع جون أن ينتصر على كل عضو في الفريق.

2. أعد كتابة مقدمات ونتيجة الاستدلال المتعلق بالمتشردين والفقراء (في الفصل السابع عشر) مستعينًا بالأسوار. والشيء نفسه بالنسبة إلى باقي الأمثلة في الفصل السابع عشر، والتمرين 1 من الفصل 17، والتمارين 2 و4 من الفصل 19.

3. هب أن مجال القول يشتمل على ع، غ،...، ن، عبِّر عنها بالدوال الصدقية:

Vسـ (ك(سـ) V ل(سـ))، ʌسـ (ك(سـ) V ل(سـ))،

ʌسـ (ك(سـ) ʌ ل(سـ)).

Vسـ ك(سـ) V Vسـ ل(سـ)، ʌسـ ك(سـ) V ʌسـ ل(سـ)،

ʌسـ (ك(سـ) ʌ ʌ سـ ل(سـ).

عيِّن الصيغ المتكافِئة؟

= التوالي نظرا لتماثلهما مع رمزي الوصل والفصل «ʌ» و«V». [المترجم]

23 قواعد تحرك الأسوار والصور الواحدية

كان مدى كل ورود للسور، في الصورة التي أوضحنا فيها التسوير إلى حد الآن، دالة صدقية لـ «ك(سـ)»، «ل(سـ)» وغيرهما. ومع ذلك نستطيع أن نكون أكثر تحرُّرًا ونسمح لبعض المكونات الموجودة في مدى السور بأن تستغني عن «سـ» ونرمز لها بـ «ب» أو «ج» فقط.

من المنطقي، على سبيل المثال، كتابة «Vسـ (ب ٨. ك(سـ))». ينبغي لهذه الصيغة أن تصدق فقط بالنسبة إلى تأويلات «ب» و«ك» التي تجعل «ب ٨ ك(سـ)» تصدُق بالنسبة إلى شيء واحد على الأقل هو سـ ومن الطبيعي أن نجد أنّها التأويلات نفسها التي تجعل «ب» و«ك» تصدقان على شيء ما، بحيث إن الصيغتين:

(1) Vسـ (ب ٨. ك (سـ))، ب ٨.Vسـ ك (سـ)

متُكافِئتان، كما نجد أن الصيغتين التاليتين:

(2) Λسـ (ب .٨ ك (سـ))، ب ٨ Λسـ ك (سـ).

متُكافِئتان باعتماد استدلال مماثل.

ويمكن أن نتوقع النتيجة نفسها من الزوج:

(3) Vسـ (ب v ك (سـ))، ب v Vسـ ك (سـ).

وكذلك الشأن بالنسبة إلى الزوج:

(4) Λسـ (ب v ك (سـ))، ب v Λسـ ك (سـ).

يمكن تأكيد هذه التوقعات بواسطة استدلال مباشر يماثل تقريبًا الاستدلال الذي قادنا إلى (1) و(2)، كما يُمكننا أيضًا أن نشتق، وبطريقة

مفيدة جدًا، هذه التكافؤات بعضها من بعض. فلنأخذ مثلًا (3) حيث «V سـ (ب V ك(سـ))»، تكافؤ «¬Λ سـ ¬(ب V ك(سـ))»، التي تُكافئ بالتالي، تبعًا لقانون دي مورغان، «¬Λ سـ (¬ب Λ. ¬ك(سـ))». غير أنَّ الجزء «Λ سـ (¬ب Λ. ¬ك(سـ))» في هذه الصيغة يُكافِئ بواسطة (2) «¬ب Λ. Λ سـ ¬ك(سـ)»؛ بحيث إن الصيغة برمتها «¬Λسـ (¬ب Λ. ¬ك(سـ))» تغدو «¬(¬ ب Λ. Λسـ ¬ك(سـ))»، أو بإعمال قانون دي مورغان، «ب V ¬Λ سـ¬ ك(سـ)»، أي «ب V Vسـ ك(سـ)». وهناك بالضبط طريقة موازية في كل النقط تنقلنا من (1) إلى (4).

تلزم المتُكافِئتان:

(5) Vسـ (ب ← ك (سـ))، ب ← Vسـ ك (سـ)

(6) Λسـ (ب ← ك (سـ))، ب ← Λسـ ك (سـ)

مباشرة وعلى التوالي عن (3) و(4)، مادامت «ب ←» تكافئ «¬ب V». غير أن المتكافئتين الإضافيتين اللتين قد يكون القارئ بصدد توقعهما غير سليمتين، في حين أن المتُكافِئتين التاليتين على وجه الخصوص صحيحتان، (لنلاحظ القلب الحاسم):

(7) Vسـ (ك (سـ) ← ب)، Λسـ ك (سـ) ←ب.

(8) Λسـ (ك (سـ) ←ب)، Vسـ ك (سـ) ← ب.

رغم غرابة (7)، فإننا نحصل عليها بسهولة انطلاقًا من (3)، ذلك أن « Vسـ (ك (سـ) ← ب)» تكافئ «Vسـ (¬ك(سـ) V ب)»، وبالتالي تكافئ «Vسـ ¬ك(سـ) V ب»، وكذا «¬ Λسـ ك(سـ) V ب»، وتكافئ أخيرًا «Λسـ ك(سـ) ←ب». ونحصل على (8) بالطريقة نفسها انطلاقًا من (4).

أما بالنسبة إلى التطبيقات المستقبلية لـ (1)- (4) فهناك عادة اكتسبناها في الباب الأول يجب أن نحافظ عليها مفادها: تجاهل الترتيب في الوصليات والفصليات. وعليه فقد كافأت، في الاستدلال السابق، بين « Vسـ (¬ك(سـ)

V ب)» و«Vسـ ¬ك(سـ) V ب» بموجب (3). وبتجاهل تام لكون (3) تبين أن «ب» في يمين «V» و«ك(سـ)» في يساره.

تخضع الأسوار، من ناحية التركيب، لقاعدة عامل النفي نفسها (الفصل الرابع) التي مفادها: ينطبق السور على أصغر عبارة أو على أصغر صيغة ممكنة تليه. ففي الصيغة «Vسـ (ك(سـ) ← ب)» يقتضي القوسان أن ينطبق السور على الشرط كله؛ في حين في الصيغة «Vسـ ك(سـ) ← ب»، نفهم أن السور يقع داخل المقدم وينطبق عليه وحده. يُمكن التعبير عن الفرق بين «Vسـ (ك(سـ) ← ب)» و«Vسـ ك(سـ) ← ب» لفظيًا كالآتي:

يوجد شيء ما سـ بحيث إذا كان ك(سـ) فإن ب.

إذا وجد شيء ما سـ بحيث ك (سـ) فإن ب.

والشيء نفسه بالنسبة إلى كلٍّ من «Λسـ (ك(سـ) ←ب)»،

و«Λسـ ك(سـ) ←ب»

يوجد كل شيء سـ بحيث إذا كان ك (سـ) فإن ب.

إذا وجد كل شيء سـ بحيث ك(سـ) فإن ب.

ولندرك أهمية الفرق الدلالي في هذا الزوج الأخير، لنعتبر أن «ك(سـ)» تدلّ على «يقدم سـ هبة»، و«ب» تدلّ على «سأفاجأ». في هذه الحالة تقول الصيغة «Λسـ (ك(سـ) ←ب)» عن كل شخص، حتى الأكثر كرمًا، بأنه إذا قدّم هبة فسأفاجأ؛ وتقول إنني لا أتوقع أي هبة على الإطلاق. في حين لا تترجم الصيغة «Λسـ ك(سـ) ←ب» هذا النوع من التشاؤم، بل تقول فقط إنني سأفاجأ (ومن لا يفاجأ؟) في الحالة الرائعة التي يمنح فيها كل شخص هبة. يظهر الفرق في اللغة المتداولة عندما نقابل «أيًا كان» و«كل واحد»: تقول «Λسـ ك((سـ) ← ب)»، بأنه إذا قدم «أيًا كان» هبة فإنني سأفاجأ، في حين أن «Λسـ ك(سـ) ←ب» تقول فقط إذا قدَّم كل شخص هبة فسأفاجأ.

قد يصدمنا، على العموم، الفرق بين «أيًا كان» و«كل واحد»، في

الاستعمال بخاصيته غير المنظمة، بل والغريبة غير أن الحل يوجد في مدى السور الكلي. فحيثما يقتضي الأمر التمييز بين مدى طويل ومدى قصير، كما هو الحال بين «∧س (ك(س) ←ب)» و«∧س ك(س) ←ب»، فالمتكلم يفهم، لاشعوريًا، أن «أيًا كان» تخلق مدى أطول وأن «كل واحد» تخلق مدى قصيرًا. ولا تنطبق هذه القاعدة عندما يتعلق الأمر بالشرط فقط، بل بكل الروابط الأخرى، وخصوصا على النفي. هب، مثلًا، أن مجال القول هو الشعراء. فالعبارتان «لا أعرف أي شاعر» و«لا أعرف كل شاعر» تستدعيان، على التوالي، مدى طويلًا ومدى قصيرًا:

∧س ¬(أعرف س)، ¬∧س (أعرف س).

تشكل المتُكافِئات (1)-(8) قواعد تحرك الأسوار التي تبين كيف نحرك السور عبر رابط الوصل، أو الفصل، أو الشرط. وقد أشرنا إلى قواعد تحرك الأسوار عبر عامل النفي، في الفصل السابق، وذلك في صيغة المتُكافِئتين الآتيتين:

(9) ∧س ¬ك(س)، ¬∨س ك(س)

(10) ∨س ¬ك(س)، ¬∧س ك(س)

تمثل «ب» في قواعد تحرك الأسوار عبارة خالية من «س» نحو «سأفاجأ»، ومع ذلك يُمكن أن تمثل أيضًا عبارة نحو «ع سيفاجأ»، بحيث نستدعي الإلحاق المفترض لسور من الخارج إما «∧ع» أو «∨ع». ولنرى كيف يُمكن أن تحدث مثل هذه الحالة، لنفرض أن علينا أن نحلِّل المثال التالي:

يوجد شخص ما [متشائم] بحيث إذا قدِّم أيًا كان هبة، فإنه سيفاجأ.

لنستعمل هذه المرة «ع» داخل سورنا بدل «س» (فقط من أجل التغيير)، بإمكاننا أن نترجم مثالنا على هذا النحو، في المرحلة الأولى:

∨ع (إذا قدم أيًا كان هبة، فإن ع سيفاجأ).

بيد أن الجزء «إذا قدم أيًا كان هبة، فإن ع سيفاجأ» له الصيغة «∧س (ك

(سـ ←ب)». أو «∧سـ (ك (سـ) ← ل(ع))» وعليه يصير الكل بهذه الصيغة:
(11) Vعـ∧سـ (سـ يمنح هبة ← عـ سيفاجأ)
وليكن مثالًا للصيغة «Vعـ∧سـ (ك(سـ) ← ل(ع))».

من الواضح أن الاختيار الأبجدي لأحرف التسوير اعتباطي. تقول العبارتان: «Vسـ م(سـ)» و«Vعـ م(ع)» معًا، إن شيئًا ما هو م فقط. ويوضح المثال السابق المكوّن من سورين، على الأقل، لماذا نُحبّذ كثيرًا من الأحرف لنختار من بينها؛ إننا نحتاج إلى مراجع محددة. نريد أن يكون واضح أن السور الأول في «Vعـ∧سـ (ك (سـ) ← ل(ع))» متعلِّقًا بالتالي «ل(ع)» بينما يتعلق السور الثاني بالمقدم «ك(سـ)».

تسمى العبارات من قبيل « يمنح سـ هبة»، و«سيفاجأ عـ»، و«يمنح سـ هبة ← سيفاجأ عـ»، التي تماثل العبارات، ماعدا في تضمنّها لـ «سـ» أو «عـ» بلا سور، العبارات المهملة (انظر الفصل 21). إذ لا تكون العبارات المهملة صادقة أو كاذبة، لكن يُمكنها أن تصدق أو تكذب، على غرار الحدود، على مواضيع متنوعة. فالجملة «سـ كتاب» يُمكن أن تقال، شأنها شأن الحد «كتاب» نفسه، إنها تصدق على كل كتاب وتكذب على كل ما عداه؛ ويمكن أن يقال إن الجملة «سـ كتاب ∧ سـ ممل» تصدق على كل كتاب ممل، وتكذب على كل ما عداه؛ أما «سـ = سـ» و«سـ إنسان ← سـ فان» فتصدقان على كل شيء. وعمومًا، عندما نقول عن جملة مهملة إنها تصدق على موضوع معين، فإننا نعني أن الجملة المهملة تصبح عبارة صادقة إذا أعدنا تأويل «سـ» باعتباره اسمًا لهذا الموضوع. ينطبق مفهوم ماصدق حد ما (الفصل 14) بالطريقة نفسها على العبارت المهملة ذلك أن ماصدق عبارة مهملة هو فئة كل المواضيع التي تصدق عليها العبارة المهملة.

بما أن الأحرف الترميزية «ب» و«جـ»، إلخ، تمكن من تمثيل الجمل المهملة، نحو «عـ سيفاجأ»، أو العبارات على حد سواء، فإنني سأسميها

من الآن فصاعدًا الأحرف القضوية. ولنلاحظ أنها تختلف مثل الأحرف الترميزية «ك»، و«ل»، إلخ. بالنسبة إلى الحدود، بالأساس من حيث وظيفة «س» و«ع»، إلخ. ففي الوقت الذي يُمكن أن تظهر «س» في العبارات بما فيها العبارات المحصورة بسور ما، فإن «ب» و«ج» إلخ، و«ك» و«ل» لا تستطيع، من جهتها، أن تظهر في العبارات بتاتًا[1]؛ إنها مجرد عبارات زائفة أو حدود زائفة، نستعملها في صور تمثّل أشكالًا خارجية للعبارات.

تسمّى الأحرف «س» و«ع» و«ف»، وغيرها المُستعمَلة بالطريقة نفسها المتغيرات. غير أنّه علينا أن نحتاط من أن نجرد هذا المفهوم الرياضي التقليدي من معانيه القديمة. لن نتمكن من فهم المتغير جيدًا إذا ما اعتبرناه إلى حد ما متغيرًا زمنيًا، يؤدي بالعبارة التي يظهر فيها إلى التغير معه. كما لا يجب أن يفهم ككمية مجهولة نكتشفها عندما نقوم بحل المعادلات. إن المتغيّرات، في الحقيقة، ضمائر بسيطة تستخدم للإحالة المتراكبة، مثلما يُمكن عادة لـ «س» أن يترجَم، خلال تمظهراته، شفاهيًا إلى المحدد «ه»، وكذلك حال مختلف المتغيّرات «س، و«ع»، «ف»، إلخ، التي تطابق مختلف الضمائر، أو للصفات والنعوت نحو «الأول» و«الثاني» و«الثالث»، إلخ. يُمكن أن نشارح العبارة:

V س [سرقت سادي س من المحل التجاري ٨. V ع (قايضت سادي س بـ ع)]

حرفيا كما يلي:

يوجد شيء ما بحيث إن سادي سرقته من المحل التجاري، ويوجد شيء بحيث إن سادي قايضت الأول بالثاني.

في العبارة:

(12) Vس (ع عمَ س)

(1) استثناء: يُمكن أن تظهر هذه الأحرف بين مزدوجتين في عبارات ما. بل يُمكن أن تظهر حتى علامة بلا معنى بين مزدوجتين في عبارة ما. إن الاقتباس برمته اسم دال على العلامة الخالية من المعنى.

نجد موقع «ع» مطلقًا لأنه لا يوجد «∧ع» أو «∨ع»؛ في حين أن مواقع س مقيدة بسبب «∨س». قد يكون الموقع الوحيد نفسه «س» مقيدًا في عبارة برمتها، ومطلقًا في جزء من هذه العبارة. فالموقع الأخير لـ«س» في (12)، مثلًا، مقيد في (12) لكنه مطلق في الجزء «ع عمّ س». كما يُمكن أن يكون موقع «س» في العبارة الواحدة نفسها مطلقًا وفي باقي المواقع مقيدًا. وهذا ما تشهد عليه العبارة الوصلية التالية:

(13) س أحمر∧. ∧ س (س له كتلة).

حيث لا يتعلق السور سوى بالمكون الثاني. فالعبارة (13) تعني أن «س أحمر ولكل شيء كتلة»، ومن الممكن أن نكتبها أيضًا بمتغيرين مختلفين:

س أحمر ∧ ∧ع (ع له كتلة).

عندما ننطلق من «ب»، و«ج»، «ك(س)»، «ل(س)»، «ك(ع)» إلخ. ثم نطبق الأسوار والترميز الصدقي، نحصل على صور تسويرية واحدية. ويعود الحصر «واحدية» إلى كوننا لم نقبل بعد بعناصر من قبيل «ك (س، ع)». وسنصطلح على الصيغ التسويرية، شأنها شأن العبارات، بكونها مهملة إذا كانت تتضمن متغيرًا مطلقًا أو أكثر، وإلّا كانت محصورة. وعليه تُعتبر الصور:

∧س [ك (س) ← ∨ع (ل (س) ∧. م (ع))]

محصورة، لكنَّ أجزاءها:

ك(س) ← ∨ع (ل (ع) ∧. م (س))، ∨ ع (ل(ع) ∧. م(س))،

ل(ع) ∧. م (س)،

كلها عبارات مهملة. وتُعدُّ الصور الصدقية، نحو «ب ← ج» صيغًا تسويرية محصورة.

تكون الصيغ التسويرية، سواء المهملة أو المحصورة، صحيحة متى صدقت في كل التأويلات في كل مجالات القول غير الفارغة. يؤول حرف

الحد، كما سلف، عبر تعيين الأشياء التي تصدق عليها في مجال القول. ويؤول الحرف القضوي، كما سلف، عبر إسناد قيم الصدق. ويؤول المتغير المطلق، أخيرًا، عبر إسناد موضوع ما إليه في مجال القول. وتنطبق مفاهيم الاتساق واللزوم والتكافؤ (التلازم) بالطريقة نفسها.

لمحة تاريخية: كانت قواعد تحرك الأسوار صريحةً عند كلّ من وايتهيد وراسل، 1910. أما الحدُّ فَمِن وضْع هربراند. وقد استعمل مصطلح «العبارة المهملة» (open sentence) من قبل كارناب (Carnap) وآخرين. كان المصطلح المتداول لهذا الغرض قبل ذلك هو «الدالة القضوية (propositional function)». غير أنّه من الممكن أن يغلطنا لأنّ الدالة بالمعنى الرياضي هي بالأحرى نوع معين من العلاقة أكثر من كونها ترميزًا.

تمارين

1. **هب أنَّ مجال القول يقتصر على ع، غ، ....، ن، طوِّر (7) و(8) عبر توسيع التسوير إلى فصليات وإلى وصليات.**
2. **لا وجود لقواعد تحرك الأسوار بالنسبة إلى «↔». بيِّن بالعكس أنه لا يوجد من بين الصيغ التالية:**

Λس(ب ↔ ك(س)). ب ↔ Λس ك(س). ب ↔ Vس ك(س). Vس(ب ↔ ك(س))

زوج من المتُكافِئات. الطريقة: انظر ما سينتجه التحليل الصدقي عندما تستبدل «ص» بـ«ب» في كل موقع، والشيء نفسه عندما تستبدل «ك» بـ«ب».

3. **ما هي اللزومات الموجودة بين الصيغ الأربع في التمرين 2؟ الطريقة نفسها.**

24 الصور الشاملة (الصدرية) والصور الخالصة

يمكن أن تجرى قواعد تحرك الأسوار بالاختيار بين منحيين: إما بغرض توسيع مدى سور معيّن وإمّا لتضييقه. يؤدّي المنحى الأول إلى جعل الصيغة صورةً شاملة، بحيث تكون كل الأسوار مرتَّبةً في المقدّمة ومتحكِّمة في باقي الصيغة برمّتها. وأما المنحى الثاني فيؤدي إلى صيغة خالصة، حيث يعمل كل سور حينها على دالة قضوية كلِّ مُكوّن فيها، من دون استثناء، ترد فيه مواقع مطلقة لمتغيّر السور.

يتوقف هذان الاستعمالان لقواعد تحرّك الأسوار على تحويلات تمهيدية من طبيعة مختلفة. فإذا كان المنحنى الذي اخترناه يقود إلى الصيغة الشاملة، فسيكون علينا بالتأكيد، أن نحذف بواسطة التشارح كل ورود لـ «↔» يربط الصيغ التي تتضمن في صلبها الأسوار: لأننا رأينا، بالفعل، في أحد التمارين، أنه لا وجود لقاعدة تحرك الأسوار بالنسبة إلى «↔». يظل كل سور محصورًا في إحدى الصّيغ التي يربطها «↔» على حاله، ولا يُمكن أن يوضع في موضع شامل ما لم نحذف «↔» بواسطة التشارح.

هناك تحويل آخر يمهّد لتطبيق قواعد تحرك الأسوار بغية الحصول على صور شاملة هو تغيير أحرف المتغيرات المقيدة. إن «ك(سـ) ∧ Vسـ ل(سـ)» جيدة كما هي ما دامت تنحصر في وصل الصيغة المهملة «ك(سـ)» والصيغة المحصورة «توجد ل» (التي يُمكن أن نكتبها أيضًا بهذا الشكل «Vعـ ل(ع)». والكل يفيد أن سـ هي ك وأن هناك ل. وبخلاف ذلك، لا شيء سيكون على ما يرام إذا طبقّنا قاعدة تحريك الأسوار (1) للفصل السابق على

«ك(سـ) ∧ Vسـ ل(سـ)»، للحصول على «Vسـ (ك سـ ∧ ل(سـ)). يُمكن لهذه الصيغة الأخيرة أن تعني أن هناك شيئًا ما دائري ومربع، وهو قول كاذب. في حين أن الصيغة الأولى تعني أن سـ دائري وأن شيئًا ما مربع، وهو ما يصدق على كل كرة بيزبول سـ إن ما ينبغي فعله قبل تطبيق قاعدة تحرك الأسوار (1) على «ك(سـ) ∧ Vسـ ل(سـ)» هو إعادة كتابة هذه الصيغة الأخيرة في صيغة «ك(سـ) ∧ Vعـ ل(عـ)»: ثم نستطيع أن ننتقل، بعد ذلك، إلى «Vعـ (ك(سـ) ∧ ل(عـ))». علينا أن نتذكّر فقط، أن (1) لا تنطبق مباشرة على «ك(سـ) ∧. Vسـ ل(سـ)»: تمثل «ب» التي تظهر في (1) بالضرورة صيغة من دون «سـ» مطلق.

عندما نُنهي هذه التمهيدات، نحوّل صورة ما إلى صورة شاملة بواسطة متوالية من التحويلات نجريها وَفقَ قواعد تحرك الأسوار (1) – (10). مثلًا:

ب↔ ∧سـ [ك(سـ) ← Vعـ (ك(عـ) ∧ ل(سـ))].

إذا أجرينا تشارح «↔» بوصل بين شريطين حصلنا على:

ب← ∧سـ[ك(سـ) ← Vعـ (ك(عـ) ∧. ل(سـ))] ∧ ∧سـ[ك(سـ) ← Vعـ (ك(عـ) ∧. ل(سـ))] ← ب.

ثم بتغيير أحرف المتغيرات:

ب← ∧سـ[ك(سـ) ← Vعـ (ك(عـ) ∧. ل(سـ))] ∧. ∧فـ [ك(فـ) ← (Vقـ (ك (قـ) ∧. ل (فـ))] ← ب.

تنتج التحويلات المتبقية عن قواعد تحرك الأسوار (6) و(7) و(2) و(1) و(5) ثم (8)، بحيث نطبّق قاعدتين في كل مرة.

∧سـ[ب ←. ك(سـ) ← Vعـ (ك (عـ) ∧. ل(سـ))] ∧. Vفـ [ك (فـ) ← V قـ (ك (قـ) ∧ ل (فـ)). ← ب].

∧سـ V فـ [ب ←. ك(سـ) ← Vعـ(ك(عـ) ∧. ل(سـ)): ∧ ك (فـ) ← Vقـ (ك(قـ) ∧. ل (فـ)) . ← ب].

∧سـ V فـ [ب← V عـ (ك (س) ←. ك (ع) ∧ل (س)) ∧ Vقـ (ك(ف) ←.
ك (ق) ∧. ل (ف)) ← ب].

∧سـ V فـ [V عـ (ب ←: ك(س) ←. ك (ع) ∧ل (س)) ∧. ∧قـ (ك (ف) ←.
ك (ق) ∧. ل(ف): ← ب].

∧سـ V فـ V عـ ∧قـ (ب ←: ك(س) ←. ك (ع) ∧ ل (س):. ∧ ك (ف) ← .ك
(ق) ∧. ل (ف): ← ب].

لنشر إلى أنه تقريبًا في كل مرحلة نجد بعض الحرية في اختيار السور الذي سنضعه لاحقًا في مقدمة العبارة.

يمكن لقانوني التوزيع في (9) و(10) من الفصل 22 أن يسرّعا تصدير الأسوار واختصار النتيجة. لنتأمل المثال الآتي:

(1) ∧سـ[V عـ (ك(س) ↔ ل(ع)) V V عـ ك(ع)] ∧ ∧سـ (ك(س) V ل(س)).

لنجعل هذا المثال في صورة شاملة بالطريقة التي بسطناها قبل قليل، ينبغي أولًا أن نبدل بهذه الكيفية أحرف متغيراته كالآتي:

(2) ∧سـ[V عـ (ك(س) ↔ ل(ع)) V V فـ ك(ف)] .∧ ∧قـ (ك(ق) V ل(ق)).

انطلاقًا من هذه النتيجة، وبعد إجراء ستة تطبيقات لقواعد تحرك الأسوار (1) – (3) من الفصل 23، نصل أخيرًا إلى الصيغة الشاملة:

(3) ∧سـ V عـ V فـ ∧قـ (ك(س) ↔ ل(ع) .V ك(ف): ∧ ك(ق) V ل(ق)).

في حين، عوض إعادة كتابة (1) في صيغة (2)، نطبق فقط قانون التوزيع (9) و(10) من الفصل 22 على (1) سنحصل على:

∧سـ[V عـ (ك(س) ↔ ل(ع) . V ك(ع)) . ∧ ك(س) V ل(س)].

ويقودنا تطبيق واحد لقاعدة تحرك الأسوار (1) من الفصل 23 إلى صيغة شاملة أبسط من الصيغة الشاملة السابقة (3)، وأسرع في الحصول عليها:

(4) ∧سـ V عـ (ك(س) ↔ ل(ع) . V ك(ع): ∧ ك(س) V ل(س)).

وبغية تحقيق مكاسب من هذا القبيل، قد يكون من المشروع تعديل أحرف

الأسوار من أجل خلق تكرارات بدل حذفها. فلو أعطينا (2) كصيغة صدرية، كانت لنا مزية إعادة كتابة (1) ولسلكنا كما رأينا قبل قليل. لنشر، مع ذلك، إلى أن هذه الخطة المبنية على التوزيع إنما يتم اقتراحها بسبب فعاليتها؛ فيمكن أن توضع الصيغ دائمًا في صيغة شاملة من دونها. إننا لا نحتاج، بالتحديد، سوى إلى تشارح كل التشارطات التي تتضمن الأسوار وإلى تنويع متغيرات التسوير ثم إلى تطبيق قواعد تحرك الأسوار.

وعند تبديل الأحرف، من المفيد دائمًا تفادي تلاقي المتغيرات. ومن المفيد للغاية تغيير «Vع (ك(س) V ل(ف))»، بـ «V ف (ك(س) V ل(ف))»، لكن من الغلط تمامًا أن نغيّرها في «Vس (ك(س) V ل(س)) »: وذلك لأنه لا يتحقق ههُنا تغييرٌ سطحي في الترميز، بل يتعدّاه إلى تغيير حاسم في البنية. عندما تُعاد كتابة التسوير يجب أن تقدم الصورة التي تقع تحت السور مواقع مطلقة للمتغير الجديد في كل مكان وفقط حيثما تقدم مواقع مطلقة للمتغير القديم. يتضمن الجزء «ك(س) V ل(ف)» من المثال السابق «ف» مطلقة حيث وفقط حيث «ك(س) V ل(ع)» تتضمن «ع» مطلقة؛ وبالعكس، تتضمن «ك(س) V ل(س)» «س» مطلقا لكنه ليس مطلقًا حيث تتضمن «ك(س) V ل(ع)» متغيرًا مطلقًا «ع».

في الوقت الذي تعمل الصيغة الشاملة على إخراج الأسوار، تعمل الصيغة الخالصة على نقلها إلى الداخل. تقوم عملية التخليص، شأنها شأن الصيغة الشاملة، على تحويلات تمهيدية . لنأخذ التسوير غير الخالص «V س (ك(س) Λ. ب V ل(س))» الذي يتجلّى عدم كونه خالصًا في وجود «ب» وغياب «س». وعلى سبيل التحويل التمهيدي، نضع الصيغة «ك(س) . Λ ب V ل(س)» التي يحمل عليها السور في صورة قانونية فصلية، ثم نقوم بتوزيع السور بواسطة الفصل، بالطريقة الآتية:

Vس (ك(س) Λ. ب .V. ك(س) Λ. ل(س))،

∨س (ك (س) ∧. ب) ∨ ∨س (ك (س) ∧. ل(س)).

ولنطبق الآن قواعد تحرك الأسوار (1) من الفصل 23، ونتمم عملية التخليص:

∨س ك(س) ∧. ب .∨ ∨س (ك(س) ∧ ل(س)).

لكي نخلِّص تسويرًا كليًّا تكون عدم خلاصيته مغلقة بالكيفية نفسها، سنبدأ بتحويل الصيغة التي يحمل عليها السور في صورة قانونية وصلية؛ وذلك لأن السور الكلي يوزِّع على الوصل مثلًا بواسطة خطوات مقابلة، سنعالج التسوير غير الخالص «∧س (ك(س) ∨. ب ∧ ل(س))» كالآتي:

∧س (ك (س) ∨ ب ∧. ك(س) ∨ ل(س))،

∧س (ك(س) ∨ ب) ∧. ∧س (ك(س) ∨ ل(س))،

∧س ك(س) ∨ ب ∧. ∧س (ك(س) ∨ ل(س)).

من الممكن، بواسطة توليف مختلف هذه الطرائق، أن نخلِّص أية صورة تسويرية من كل ما يجعلها غير خالصة. والطريقة العامة كالتالي: حيثما نلاقي تسويرًا غير خالص، نضع الصيغة التي يتحكم فيها السور في صورة قانونية فصلية أو وصلية (وذلك تبعًا لكون السور إما وجوديًا وإمَّا كليًّا). ونطبق، مسبقًا، وفي كل مرحلة من مراحل الطريقة كل قواعد تحرك الأسوار (1)-(8) من الفصل 23 التي تكون قابلة للتطبيق بشكل ملحوظ- يكون ذلك دائمًا بحيث ندفع الأسوار إلى الداخل. ونواصل بهذا الشكل إلى أن نحذف كل ما يجعل العبارات غير خالصة.

لنقم، مثلًا، بتخليص (1). فبواسطة قاعدة تحرك الأسوار (4) من الفصل 23 تصبح (1) كما يلي:

(5) ∧س ∨ع (ك(س) ↔ ل(ع)) ∨ ∨ع ك(ع) ∧ ∧س (ك (س) ∨ ل(ع)).

ثم نضع الجزء «ك(س) ↔ ل(ع)» للتسوير غير الخالص «∨ع(ك(س) ↔ ل(ع))» في صورة قانونية فصلية، ثم نوزِّع السور «∨ع»، فتغدو صيغة (5) برمتها:

∧س[∨ع (ك(س) ∧ ل(ع)) ∨ ∨ع (⌐ك(س) ∧ ⌐ل(ع))] ∨ ∨ ع ك(ع)
∧. ∧س (ك(س) ∨ ل(س)).

والآن يُمكننا أن نطبق مرتين قاعدة تحرك الأسوار (1) من الفصل 23، فنحصل على:

∧س[ك(س) ∧ ∨ع ل(ع) .∨. ⌐ك(س) ∧ ∨ع ⌐ل(ع)] ∨ ∨ع ك(ع) ∧.
∧س (ك(س) ∨ ل(س)).

ونضع الجزء الذي يتحكم فيه السور الأولي «∧س» في صورة قانونية وصلية. فيصير الكل:

∧س[ك(س) ∨ ∨ع ⌐ل(ع) ∧ ∨ع ل (ع) ∨ ⌐ ك(س) ∧. ∨ ع ل(ع) ∨
∨ ع ⌐ل(ع)] ∨ ∨ع ك(ع) ∧ ∧س (ك(س) ∨ ل(س)).

لنطبق الآن قاعدة تحرك الأسوار (2) من الفصل 23:

∧س[ك(س) ∨ ∨ع ⌐ل(ع) ∧ ∨ع ل (ع) ∨ ⌐ ك(س)] ∧ ∨ ع ل(ع) ∨
∨ع ⌐ل(ع) . ∨ ∨ع ك(ع): ∧ ∧س (ك(س) ∨ ل(س)).

ولنوزع بعد ذلك السور «∧س»:

∧س[ك(س) ∨ ∨ع ⌐ل(ع)] ∧. ∧س (∨ع ل(ع) ∨ ⌐ك(س)) ∧. ∨ع
ل(ع) ∨ ∨ع ⌐ل(ع). ∨ ∨ع ك(ع): ∧ ∧س (ك(س) ∨ ل(س)).

وبتطبيق قاعدة تحرك الأسوار (4) من الفصل 23 مرتين نحصل على:

(6) ∧س ك(س) ∨ ∨ع ⌐ ل(ع) ∧. ∨ع ل(ع) ∨ ∧س ⌐ك(س) ∧. ∨ ع
ل(ع) ∨ ∨ع ⌐ل(ع) . ∨ ∨ع ك(ع): ∧ ∧س (ك(س) ∨ ل(س)).

فنحصل، في الأخير، على تسوير خالص. وإذا ترجمنا «∧س» إلى الصيغة «⌐∨س ⌐» وحذفنا كل المتغيرات، فإننا نتمكن من تكثيف المجموع في الصيغة البولية برمتها كالآتي:

(7) ⌐ ∨ ⌐ك ∨ ∨ ⌐ل ∧ ∨ ل ∨ ⌐ ∨ك ∧ ∨ل ∨ ∨ ⌐ل . ∨ ∨ ك: ∧
⌐ ∨ ⌐(ك ∨ ل).

وعليه تكون الصيغة الأصلية (1)، والصورتان الشاملتان (3) و(4) والصورة الخالصة (6) والصورة البولية (7) كلُّها صورًا متكافِئةً.

هناك طريقة بديلة للتخليص جديرة بالاهتمام أيضًا. فقد يكون السور كليًا أو وجوديًا على السواء؛ دعونا نمثله بـ«سو(سـ)». فيكون التخليص، إذا جاز القول، هو «ب»؛ وعليه يُمكن تصوير التسوير على النحو الآتي: «سو(سـ) (...ب...)». وهو ما يكافئ:

(8) ب . ٨ سو(سـ) (...ص...) . ٧. ~ب. ٨ سو(سـ) (... ك ...) [ص وك قيم صدقية].

ولندع القارئ يستدل لماذا. وأخيرا نبتّ في «ص» و«ك» خارج «... ص ...» و«... ك ...» بواسطة دالة الصدق المنطقية. إنَّ التعليمات موجزة بشكل مثير للإعجاب. يستحسن بالقارئ أن ينجز بعض الأمثلة المعقدة بواسطة الطريقتين معًا ويقارن فعاليتهما.

تتضمن صورة تسويرية واحدية ما يجعلها غير خالصة متى تضمنت أسوارًا متراكبة، أي كلما ظهر سور ما في مدى سور آخر. وفعلًا، إذا كانت صيغة ما تتضمن أسوارًا متراكبة، فإنها ستتضمن على الأقل سورين منها يكونان متراكبين بشكلٍ ضيّق جدًّا لنقل «٧سـ» و«٨ع». أعني بذلك، أن مدى «٧سـ» دالة صدقية من صور يكون أحدها هو السور «٨ع»، وهذا الأخير لا يشمل أسوارًا أخرى. غير أنه في هذه الظروف إما يكون السور «٧ سـ» أو السور «٨ع» محكومًا عليه أن يكون غير خالص. ل أنه إذا كان السور «٨ع» لا يتضمن أي «سـ» مطلق، فإنه يجعل السور «٧سـ» غير خالص. في المقابل، إذا كان يتضمن «سـ» مطلقًا، فإن مدى «٨ع» دالة صدقية مكوَّنة من صور تكون إحداها إما «ك(سـ)» أو «ل(سـ)»، أو صورة أخرى مماثلة، وهذا ما يجعل السور «٨ع» غير خالص.

لقد رأينا كيف نجعل صيغة حملية واحدية خالصة، والآن رأينا أيضًا

أن النتيجة ستكون خالية من الأسوار المتراكبة. سيكون لكل تسوير كمدى دالة صدقية مكوَّنة فقط من «ك(س)»، «ل(س)»، إلخ... إذا كان «س» متغير السور، فإن «ك(ع)»، «ب»، إلخ. تستبعد بواسطة التخليص، وكذلك شأن كل الأسوار المتراكبة. فإذا ترجمنا، من جديد «∧س» إلى الصيغة «~V~س~» ثم حذفنا المتغيرات، كما فعلنا عند انتقالنا من (6) إلى (7)، فإن كل الأسوار ستختفي لفائدة الصيغ الوجودية البولية.

ومع ذلك، لا نستطيع القول دون قيد أن كل صيغة تسويرية واحدية تكون قابلة لأن ترد، على هذا النحو، إلى صويغة بولية، نحو (7). كانت (6) قابلة للرد لأنها لا تتضمن أي حرف قضوي «ب»، «ج»، إلخ، ولا أي جزء «ك (ف)»، أو ما يشبهه، غير مسوَّر. بيد أننا نستطيع القول إن كل صيغة واحدية محصورة (وبالتالي خالية من أي جزء غير مسوَّر «ك(ف)» وما شابهها) تكون قابلة للرد، وفق الطريقة الملحوظة، إلى دالة صدقية للصور الوجودية البولية ولأحرف القضايا. تكمُن الطريقة في التخليص ثم ترجمة الأسوار الكلية وحذف المتغيرات.

يتبين إذًا أن جهاز الترميز بالنسبة إلى الصيغ التسويرية الواحدية، بمتغيراته التسويرية، وأسواره المتراكبة وبما يجعله غير خالص، يكون مثقلًا بما لافائدة فيه. فقد كان من الممكن الاكتفاء بالأحرف والدوال الصدقية من الباب الأول وكذا بالصيغ الوجودية البولية. رغم كل ذلك، هناك سبب هام يدعو إلى تبني هذا الجهاز المثقل: إنه يهيّئنا إلى الوصول، في الباب الثالث، إلى الصيغ الاثنانية التي تشمل «ك (س، ع)» وشبهاتها. سيختفي في هذا المستوى نوع قابلية الرد الملحوظ هنا.

لمحة تاريخية: ارتبط اسمان بالصيغ الشاملة وبالتخليص هما: سكوليم وبهمان (Skolem and Behmann). فقد اعتمد سكوليم بقوة على الصيغة

الشاملة في عملية برهنته على نظرية التسوير الاثنانية: كما سنفعل نحن أيضًا. أما بيهمان 1922، فقد اعتمدت طريقته في البتّ (انظر نهاية الفصل 19 أعلاه) على إدماج الأسوار داخل الصيغ.

تمارين:

1. حوّل الصيغة «Λس ك(س) ← . Λس ل(س) ↔ Λس م(س)» إلى صورة شاملة.
2. قم بالشيء نفسه بالنسبة إلى الصيغة «Vس ك(س) ↔ Vس ل(س). ← Vس م(س)»
3. خلِّص العبارة «Vس Λع (ك(س) ↔ ل(ع). ← م (ع))» بواسطة الطريقة الأولى.
4. قم بالشيء نفسه بالنسبة إلى الصيغة: «Λس Vع (ك(س) ← ل(ع). ↔ م(ع))».
5. أعد (3) و(4) بالطريقة الثانية.
6. أقم التكافؤ بواسطة استدلال غير صوري، بين (8) و«سو(س) (...ب...)».

25 عَوْدٌ إلى الصحة

لا يعبأ السور الكلي الأوّلي بصحة الصيغة التي يسوّرها. وهذا واضح من دلالة التسوير الكلي. أن نقول على سبيل المثال، إن «Λع (ك(ع) ← Vس ك(س))» تصدق في جميع تأويلات «ك» لهو نفسه القول إنّ «ك(ع) ← Vس ك(س)» تصدق في جميع تأويلات «ك» وبالنسبة إلى كل إسنادات المواضيع إلى «ع»، وكذلك حال معنى صحة «ك(ع) ← Vس ك(س)». (انظر الفصل 23). وبشكل مماثل لا يعبأ السور الوجودي باتساق الصيغة التي يسوّرها.

وعليه، نستطيع أن نتحقق من صحة صيغة مهملة عبر اختبار حصرها الكلي. إنها صيغة محصورة حصلْنا عليها منها عبر إلحاق سور كلي بكل متغير مطلق. ومن أجل التحقق من صحة صيغة محصورة، عندما تكون خالية من الأحرف القضوية، نردها إلى صورة بولية، ثم نطبق طريقة الشرطيات الوجودية أو الطريقة الخلوية (الفصل 19) كما يحلو لنا. لقد بيّنا طريقة الرد إلى صيغة بولية في الفصل 24 بالنسبة إلى التحويل التدريجي من (1) إلى (5) و(6) وأخيرًا إلى (7).

لنتحقق من صحة الصورتين المهملتين:

Λس ك(س) ← ك(ع)، ك(ع) ← Vس ك(س).

كما لاحظنا ذلك، يعني هذا التحقق من صحة الصورتين المحصورتين:

Λس (Λس ك(س) ← ك(ع))، Λع (ك(ع) ← Vس ك(س)).

وعندما نخلّصهما، بواسطة قاعدتي تحرك الأسوار (6) و(8) من الفصل (23)، نحصل على:

∧سـ ك(سـ) ← ∧عـ ك(ع)، ∨ عـ ك(ع) ← ∨سـ ك(سـ)

وإذا ما تشبتنا، برد الصيغتين إلى صيغتين بوليتين رغم صحتهما الجلية، فإننا نحصل على:

¬∨ ¬ك ← ¬ ∨ ¬ك، ∨ك ← ∨ك .

لنعطِ مثالًا أقل ابتذالًا، هب أن لدينا الاستدلال:

ك(ف)، ∧سـ (∨عـ ك (ع) ← ل(سـ))، ∴ ∨عـ (ك(ع) . ∧ ل(ع)).

ولكي نثبت اللزوم، علينا أن نتحقق من صحة الشرط المطلق:

ك (ف) . ∧ ∧سـ (∨عـ ك(ع) ← ل(سـ)) . ← ∨عـ (ك (ع) . ∧ ل(ع)).

وهو ما يعني التحقق من صحة الصيغة المحصورة:

∧ف[ك(ف) . ∧ ∧سـ [∨عـ ك(ع) ← ل(سـ)] . ← ∨عـ (ك(ع) . ∧ ل(ع))].

لنتنقل إلى تخليصها، فنطبق قواعد تحرك الأسوار (8) و(1) و(6) على التوالي من الفصل 23.

∨ ف [ك(ف) . ∧ ∧سـ (∨عـ ك(ع) ← ل(سـ))] ← ∨عـ (ك(ع) . ∧ل(ع))،

∨ف ك(ف) . ∧ ∧سـ (∨ عـ ك(ع) ← ل(سـ)) . ← ∨عـ (ك(ع) . ∧ ل(ع))،

∨ فـ ك (ف) . ∧ ∨عـ ك(ع) ← ∧سـ ل(سـ) . ← ∨عـ (ك(ع) . ∧ ل(ع)).

ثم نحوّل السور الكلي ونحذف المتغيرات:

∨ ك . ∧ ∨ك ← ¬ ∨ ¬ل . ← ∨ك ∧ ل.

وباختيارنا الآن لطريقة الشرطيات الوجودية، نحول هذه العبارة الأخيرة إلى صورة قانونية فصلية[1] ونبسِّط، فترتد إلى:

∨ ¬ك∨ ∨ ¬ل∨ ∨ك ∧ ل.

وبتجميع الصور الوجودية الموجبة نحو «∨(¬ل∨ ∨ك ∧ ل)» نحصل، أخيرًا، على الشرطية الوجودية:

---

(1) مكتوب في النص الإنجليزي «وصلية» وهو خطأ مطبعي تكرر مرتين (p. 156, p. 158) صححناه هنا في الترجمة العربية، كما أضفنا بعض الأهلة التي سقطت سهوًا في النص الأصلي. [المترجم]

V ك← V(¬ل ∨ ك ∧ ل).

ونتحقق عندئذ من صحتها وفق المعيار (4) من الفصل 19. بعبارة أخرى، سنتحقق بواسطة فحص انتقائي أن «ك» تستلزم «¬ل∨ ك ∧ ل».

لِنُشِرْ إلى أن سلامة هذه التقنية تتوقف، من جديد، على قانون مبادلة الصيغ المتُكافِئة. ومجددًا، يكون مع ذلك كل شيء مرتّبًا كما هو حال الصيغ الصدقية (الفصل 9)؛ والصيغ البولية (الفصل 19) لأنه من البديهي هنا أيضًا ألّا تتوقف القيمة الصدقية لعبارة مركبة صفات القضايا والحدود التي تكوِّنها، بل فقط على كونها صادقة أو كاذبة، أو تصدق على شيء ما أو على لا شيء.

لنعد، أخيرًا، إلى مسألة اختبار الصحة بالنسبة إلى الصيغ المسوَّرة الواحدية المحصورة، والتي تتضمن الأحرف القضوية. ستكون صيغ من هذا القبيل صحيحة، بشكل صريح، فقط في حالة ما كانت ترتد إلى «ص» أو إلى صيغة صحيحة بالنسبة إلى كل إنابة لـ «ص» و«ك» بأحرفها القضوية. وهكذا، يكون الاختبار الذي نبحث عنه هو التحليل صدقي. إذا انتهى التحليل إلى «ك» في مرحلة ما، فإن هذا يعني أن الصيغة لم تكن، بالطبع، صحيحة. وفي الحالة المعاكسة نواصل تطبيق اختبارات الصحة على كل الصيغ المسوّرة التي تنتج عن التحليل الصدقي.

مثال:

<table dir="rtl">
<tr><td colspan="4">Λس (ك(س) ↔ ب) . ∧ Vس ك(س) ↔ جـ . ← . ب ↔ جـ</td></tr>
<tr><td colspan="2">Λس (ك (س) ↔ ص) . ∧ Vس ك(س) ↔ جـ . ← . ص ↔ جـ</td><td colspan="2">Λس (ك(س) ↔ ك) . ∧ Vس ك(س) ↔ جـ . ← . ك ↔ جـ</td></tr>
<tr><td colspan="2">Λس ك(س) . ∧ Vس ك(س) ↔ جـ . ← جـ</td><td colspan="2">Λس ⌐ ك(س) . ∧ Vس ك(س) ↔ جـ . ← ⌐ جـ</td></tr>
<tr><td>Λس ك(س) . ∧ Vس ك(س) ↔ ص . ← ص</td><td>Λس ك(س) . ∧ Vس ك(س) ↔ ك . ← ك</td><td>Λس ⌐ك(س) . ∧ Vس ك(س) ↔ ص . ← ك</td><td>Λس ⌐ك(س) . ∧ Vس ك(س) ↔ ك . ← ص</td></tr>
<tr><td>ص</td><td>⌐ (Λس ك(س) . ∧ ⌐Vس ك(س))</td><td>⌐ (Λس ⌐ك(س) . ∧ Vس ك(س))</td><td>ص</td></tr>
</table>

ترتد مشكلة الصحة، إذًا، إلى مشكلة صحة «⌐(Λس ك(س) . ∧ ⌐ Vس ك(س))» و«⌐(Λس ⌐ك(س) . ∧ Vس ك(س))»، وهما اللتان تتحولان في الصيغ البولية إلى:

«⌐(⌐ V ⌐ك . ∧ ⌐ Vك)» و«⌐ (⌐ Vك ∧. Vك)».

تتخذ هذه الأخيرة الصيغة الصحيحة «⌐ (⌐ ب ∧ ب)»، بينما تتخذ الأولى صيغة قانونية فصلية «V(⌐ك v Vك)»، وتتخذ الصيغة «V(كV ك)» إذا جمعنا الصور الوجودية الموجبة التي تصح بموجب المعيار(1) من الفصل 19.

فإذا استبعدنا «⌐(⌐ Vك ∧. Vك)»، التي لها الصيغة «⌐(⌐ب ∧ ب)»، نكون قد سلكنا طريقا مختصرا بديهيا، وإن كان خارجا عن الطريقة الآلية التي بلورناها إلى حد الآن. تدعو هذه الطريقة الأخيرة بالفعل إلى تحويل «⌐ (⌐ Vك. ∧ Vك)» إلى الصورة القانونية الفصلية: «Vك v V⌐ك»، ثم تحويلها، بعد ذلك، إلى العبارة الشرطية الوجودية «Vك ← Vك»، ثم

نلاحظ، في الأخير، بواسطة الفحص الانتقائي أن صورة الحد التي تظهر في المقدم تستلزم الصيغة التي تظهر في التالي. وتجدر الإشارة إلى أن الطريقة الآلية تسري على مثل هذه الحالات غير أنه نادرًا ما يُنصح باتباعها.

عندما يطبق التحليل الصدقي على الصيغ المسوّرة، كما في السابق، تكون أربع قواعد للبت تكميلية ضرورية في بعض الأحيان، زيادة على تلك التي ذكرناها في الفصل الخامس، أي إنّ «Λسـ ص» ، «Vسـ ص»، «Λسـ ك» و«Vسـ ك» ترتد إلى «ص» و«ص» و«ك» و«ك» [قيم صدقية]. وتستعمل إحداها عندما نتحقق من قاعدة تحرك الأسوار التالية. القاعدة (8) من الفصل 23:

Λسـ (ك(سـ) ← ب) ↔ . Vسـ ك(سـ) ← ب	
Λسـ(ك (سـ) ← ص) ↔ . Vسـ ك(سـ) ← ص	Λسـ(ك (سـ) ← ك) ↔ . Vسـ ك(سـ) ← ك
Λسـ ص	Λسـ ⌐ك(سـ) ↔ ⌐ Vسـ ك(سـ)
ص	

تكمن بقية هذا الاختبار في التحقق من صحة التشارط الوارد على اليسار «Λسـ ⌐ك(سـ) ↔ ⌐ Vسـ ك(سـ)». ويتحول في الصيغة البولية الصحيحة صدقيًا إلى: «⌐ Vك ↔ ⌐ Vك».

ونختم بمثال نموذجي تام، مصوغ باللغة الطبيعية:

مقدمتان:

إذا كان ينبغي أن نثق بتقرير بيساغوس، فإن مسؤول الأعمال مجرد

أداة لخدمة مصالح سيسال، ولا أحد من السكان الأصليين قد قبل مشروع النسيج.

إذا كان مسؤول الأعمال مجرد أداة لخدمة مصالح سيسال، فإن بعض السكان الأصليين إما أنهم قد قبلوا فعلًا مشروع النسيج وإمّا أنهم شتموا الحاكِم المقيم.

نتيجة:

إذا كان ينبغي أن نثق بتقرير بيساغوس فإن بعض الأشخاص الذين شتموا الحاكم المقيم لم يقبلوا مشروع النسيج.

إذا اعتبرنا «ب» هي «ينبغي أن نثق بتقرير بيساغوس»، و«ج» هي «مسؤول الأعمال مجرد أداة لخدمة مصالح سيسال»، و«ك(س)» هي «س أحد السكان الأصليين»، و«ل(س)» هي «س قد قبل بالفعل مشروع النسيج»، و«م(س)» هي «س شتم الحاكم المقيم»، يُمكن أن نرمز للمقدمتين والنتيجة بالصيغ المختلطة التالية:

ب ← . ج . Λس (ك(س) ← ¬ل(س))،

ج ← Vس (ك(س) . Λ ل(س) V م(س))،

ب ← Vس (م(س) . Λ ¬ل(س)).

علينا، إذًا، أن نخضع العبارة الشرطية التالية:

ب ←. ج . Λس (ك(س)← ¬ل(س)): Λ ج ← Vس (ك(س) . Λ ل(س) V م(س)): ←. ب ← Vس (م(س) . Λ ¬ل(س))،

لتحليل صدقي. ولكي نريح المجال، لنمثل، مؤقتًا، العبارت الحملية الثلاث بـ «با» و«جا» و«ما»:

ب ← جبا . ∧ جـ ← جا .←. ب ← ما		
ص ← جبا . ∧ جـ ← جا . ←. ص . ← ما		ك ← جبا ∧. جـ ← جا .←.ك ← ما
جـ با ∧ . جـ ← جا .← ما		ص
ص با ∧. ص ← جا .← ما	ك با . ∧ ك ← جا .← ما	
با جا ← ما	ص	

ترتد مشكلتنا إذًا إلى اختبار صحة «با ∧ جا ← ما» أي:

∧سـ (ك(سـ) ← ¬ل(سـ)) . ∧ Vسـ (ك(سـ) . ∧ ل(سـ) V م(سـ)). ← V سـ (م(سـ) . ∧ ¬ل(سـ)).

وتغدو الصيغة بوضعها في صورة بولية على النحو الآتي:

¬ V ¬(ك ← ¬ل) . ∧ V [ك(ل V م)] .← V م ∧ ¬ل،

أو في صيغة قانونية وصلية:

V ¬(ك ← ¬ل) V ¬ V [ك ∧ (ل V م)] V V م ∧ ¬ل.

فإذا قمنا بتجميع الصيغ الوجودية الموجبة، نحصل على:

¬ V[ك ∧ (ل V م) V V [¬(ك ← ¬ل) V م ∧ ¬ل].

وبالتالي نحصل على الشرط الوجودي:

V [ك ∧ (ل V م) ← V [¬ (ك ← ¬ل) V م ∧ ¬ل].

و أخيرا، نقوم بالتحقق من صحة هذه الصيغة وفق المعيار(4) من الفصل 19، عبر التحقق من كون «ك ∧ (ل V م)» تستلزم «¬(ك ← ¬ل) V م ∧ ¬ل» وهذا ما يحصل باعتماد التحليل الصدقي:

ك Λ (ل V م) ← [⌐(ك ← ⌐ل) V م Λ ⌐ل]	
(ك Λ (ص V م)) ← [⌐(ك ← ك) V م Λ ك	ك Λ (ك V م) ← [⌐(ك ← ص) V م Λ ص]
ك ← ك	ك Λ م ← م
ص	ص

تمارين

1. قم بالبت في صحة الصيغ الستّ الآتية:

Λع[ك (ع) ← Λ سك(س)].　　V ع (ك(ع) ← Λسك(س)).

Λع (V سك(س) ← ك(ع)).　　V ع (Vسك(س) ← ك(ع)).

Λع (Λسك(س) ← ك(ع)).　　V ع (ك(ع) ← V سك(س)).

2. تحقق من التشارطات المطابقة لـ (1)–(7) من الفصل 23.

3. تحقق من تكافؤ كل واحد من الأزواج التالية، عبر التحقق من التشارط:

Λسك(س).　　Λس (ك(س) V ل(س)). Λ Λس (ك(س) V ⌐ ل(س)):

Λسك(س).　　Λس (ك(س) Λ ل(س)) V Λس (ك(س) Λ ⌐ ل(س)):

Vسك(س).　　Vس (ك(س) V ل(س)) Λ. Vس (ك(س) V ⌐ ل(س)):

Vسك(س).　　Vس (ك(س) . Λ ل(س)) V Vس (ك(س) . Λ ⌐ ل(س)).

4. قم بالبت في الاستدلال التالي:

<u>مقدمتان:</u>

الأشخاص المسؤولون عن الاختطافات الأخيرة مختصون في علم النفس التجريبي.

إذا لم يوجد أحد مختص في علم النفس التجريبي معروفًا من قبل الشرطة، فإنه لا أحد من بين قدماء نقابة شرطة المهربين مختصٌ في علم النفس التجريبي.

نتيجة:

إذا كان أي أحد من قدماء نقابة شرطة المهربين هو المسؤول عن الاختطافات الأخيرة، فإن بعض المختصين في علم النفس التجريبي معروفون من قبل الشرطة.

26 الإنابة

إن ما نركز عليه في النظرية المنطقية هو الصورة، غير أن العبارة تظل هي المهمة في نهاية المطاف. إن الغرض من الصور هو فقط تسهيل الدراسة المنطقية للعبارات عبر بسط صيغها المنطقية. إن ما يربط الصورة بالعبارة التي تصورها هو الإنابة. إننا نحصل على العبارة عبر إنابة الصورة. وقد حان الوقت لفحص الرابط بينهما.

لقد كان مفهوم الإنابة ذي الصلة بالنسبة إلى الدالة الصدقية واضحًا وبسيطًا: استبدل فقط الحروف القضوية بالعبارات، والحرف نفسه دائمًا بالعبارة نفسها. وبالقدر نفسه من السهولة كان مفهوم الإنابة بالنسبة إلى الصيغة البولية: استبدل فقط الحروف الحدية بالحدود الكلية، والحرف نفسه بالحدّ نفسه.

غير أن الانتقال إلى التسوير قد عقّد الإنابة عبر السماح بوضع «ك(س)» ككل مكان عبارة غير مُحلَّلة. إذ من الواضح أنه لا يُمكننا الحديث ببساطة عن إنابة عبارة اعتباطية بـ «ك(س)»، «ك(ع)»، إلخ. يجب الحفاظ على نوع من التطابق بين منيبات «ك(س)» و«ك(ع)». أي تطابق نقصد؟

التقريب الأول: يجب أن تكون المنيبات عبارات متشابهة ما عدا في كون الواحدة تحوز ورودات مطلقة لـ «س» في كلّ -وفقط كل- المواضع التي تحوز فيها العبارة الثانية ورودات مطلقة لـ «ع». مثال ذلك:

	ك(سـ)	ك(ع)
(1)	سـ فخور بالفريق،	عـ فخور بالفريق.
(2)	سـ فخور بـ فـ،	عـ فخور بـ فـ
(3)	سـ فخور بـ سـ،	عـ فخور بـ عـ
(4)	Vفـ (سـ فخور بـ فـ)،	Vفـ (عـ فخور بـ فـ).

في كل زوج من العبارات تقول واحدة عن سـ ما تقوله الثانية عن عـ: إنه فخور بالفريق، أي فخور بـ فـ وفخور بنفسه، وفخور بشيء ما. غير أن شرط تطابق الورودات المطلقة لـ «سـ» تطابقًا كليًا مع تلك الخاصة بـ عـ مُقيِّد للغاية. لذلك نحتاج إلى السماح ببديل آخر، بالإضافة إلى الافتخار بنفسه والافتخار بشيء ما والافتخار بالفريق والافتخار بـ فـ، هو الافتخار بـ سـ:

(5)	سـ فخور بـ سـ،	عـ فخور بـ سـ

هذا لا يمنع الزوج (3): إنه إضافي. يجب الاعتراف بأن كلا الزوجين أزواج مشروعة ومختلفة من الإنابات لـ «ك(سـ)» و«ك(ع)».

وبالتالي، فإن المطلب المتوخى، بمعنى غامض، هو أن العبارة المُستَبدَلة بـ « ك(سـ)» و«ك(ع)» هي عبارات تقول على التوالي عن سـ و عـ شيئًا معينًا نفسه، سواء كان ذلك فخرًا بالذات أو فخرا بـ سـ.

إن الإجراء الصحيح يوجد في المتناول، في الفصل 21، أي تجريد الحد. علينا فقط الاعتراف بـ «ك» بشكلٍ منفصل باعتباره حرفًا حدِّيًا مرة أخرى. تتم إنابة «ك» في «ك(سـ)» بخطوتين: أولًا وضع حد مجرد مناسب بدل «ك» في «ك(سـ)»، ثانيًا إجراء عملية تشخيص ((6) أو (13) من الفصل 21). ويسري الأمر نفسه على الإنابة في «ك(ع)». للحصول على زوج من النتائج (1)، فإن التجريد المناسب هو «{قـ: قـ فخور بالفريق}»؛ وبالنسبة إلى (2) هو

«{ق: ق فخور بـ هـ}» : وبالنسبة إلى (3) هو «{ ق: ق فخور بـ ق }»: وبالنسبة إلى (4) هو «{ ق: Vهـ (ق فخور بـ هـ)}»: وبالنسبة إلى (5) هو «{ ق: ق فخور بـ س}». لا تظهر مجردات الحدود على الإطلاق في الصيغ الصورية المسوَّرة ولا في اختبارات الصحة، لكنها تقدم خدمة جليلة عندما نريد تطبيق تلك الصور ونتحصل على عبارات. إننا نريدها للتحكم في الإنابة.

هناك حاجة إلى قيود معينة. قد يبدو أن إنابة التجريد «{ق: Vس (ق فخور بـ س)} بـ «ك» في «ك(س)» و«ك(ع)» يُمكن أن تتمخض عن زوج العبارت:

(6) Vس (س فخور بـ س)، Vس (ع فخور بـ س).

إن هذا الزوج، على عكس (1)-(5)، غير متطابق. لا يوجد «الشيء [الواحد] نفسه» الذي تقوله الجملة اليمنى عن س واليسرى عن ع. تقول الجملة الموجودة على اليسار إن ع فخور بشيء ما، لكن الجملة الموجودة على اليمين لا تقول شيئًا على الإطلاق عن س: بل تقول فقط إن شخصًا ما فخور بنفسه، ويمكن أيضًا أن تُحوَّل إلى «Vهـ (هـ فخور بـ هـ)»، والتي لا تحتوي على «س» مطلق.

ومن هنا القيد الأول: لا ينبغي أن يُحمَل المجرد على متغير يُمكن أن يكون تحت مدى سور يكون داخل المجرد.

هب بعد ذلك أننا نستبدل «ك» ليس فقط في «ك(س)» و«ك(ع)» كرأسين لعمودين (1)-(5)، بل في الصيغة الصورية الصحيحة «Λس ك(س) ← ك(ع)». سيكون استبدال «{ق: ق فخور بـ س}» بـ «ك» في «ك(س)» و«ك(ع)» مشروعًا، ما يؤدّي إلى إنتاج زوج العبارات (5): لكنه ليس مشروعًا في سياق «Λس ك(س) ← ك(ع)»، لأنها ستؤدي إلى:

(7) Λس (س فخور بـ س) ←. ع فخور بـ س.

التي تفشل في وراثة البنية المنطقية التي تدين لها «∧سـ ك(سـ) ← ك(ع)» بصحتها. تقول هذه الأخيرة إنه إذا كان كل شيء هو ك فإن ع توجد. تقول (7) إنه إذا كان الجميع فخورًا بنفسه، فإنه يلزم عن ذلك، بشكل عرضي، أنه فخور بهذا الشخص.

بشكل عام، إن المشكلة في (7) هي نفسها في (6): تم تقييد ورود «س» بالسور. ومع ذلك، إن الأسباب معكوسة. إذ في (6) يقيّد السور، الذي كان متواريًا في المجرد المُستبدَل {هـ: Vسـ (هـ فخور بـ سـ)}، المتغير «س» المطلق الذي كان ينتظر في «ك(سـ)». وعلى العكس من ذلك، يقيّد السور، الذي كان متواريًا في سياق «ك(سـ)»، المتغير «س» المطلق المجرد المُستبدَل «{هـ: هـ فخور بـ سـ}». لذلك ما زلنا بحاجة إلى القيد الثاني: يجب ألّا يكون المتغير المطلق في المجرد من النوع الذي يتم تقييده بسور في الصيغة الصورية التي يتم فيها استبدال المجرد.

يمكن أن نلخص القيدين بشكل متناظر على النحو الآتي: يجب ألا تقيّد أسوار المجرد المُستبدَل متغيرات الصيغة الصورية التي تحدث فيها الإنابة، ويجب ألّا يتم تقييد متغيرات المجرد المُستبدَل بأسوار الصيغة الصورية التي تحدث فيها الإنابة. يمنع هذان القيدان ببساطة الخلط بين المتغيرات التي من شأنها، إذا سمح بها، أن تتسبب في انحراف الإنابة عن غرضها المقصود في تأويل حروف الحدود.

عند تحويل الصيغ المسوّرة إلى عبارات، لا تكون لدينا أحرف حدود فحسب، بل لدينا أيضًا أحرف عبارات لا يستهان بها. إن عملية الإنابة المناسبة، بالنسبة إلى العبارات، أبسط، حيث لا توجد مسألة المجردات والتشخيصات. تكمُن إنابة عبارة بحرف قضوي في صيغة صورية كالمعتاد في وضع العبارة مكان جميع ورودات الحرف. علاوة على ذلك، لم يعد لأول القيدين المذكورين أعلاه مكان، حيث لم يعد هناك حمل للمجردات. في

حين يذهب القيد الثاني أبعد من ذلك: يجب ألّا تكون المتغيرات المطلقة في العبارة المُستبدَلة بحيث يتم تقييدها بواسطة الأسوار في الصيغة الصورية التي يتم استبدال العبارة فيها. يوضح هذا القيد فقط الفهم الذي يحكم «ب» في الفصل 23: تمثل «ب»، في تلك السياقات، عبارة خالية من «س» مطلقة.

تمارين

1. استبدل كل واحد من المجردات:

{ف: س أشاد بـ ف لـ ع}، {ف: ف أشاد بـ ف لـ ع}،

{ف: ع أشاد بـ ف لـ ف}، {ف: ع أشاد بـ ف لـ س}.

بـ «ك» في «ك(س). بالتوافق مع قيود الإنابة، أي هذه المجردات يُمكن إنابتها بـ «ك» في «Vس ك(س)»؟ ماذا تعني العبارات الناتجة؟

2. جِد مجردًا يُنتج عندما يُستبدَل بـ «ك» في «ك(س) ← ك(ع)» ما يلي:

عـ¯ = س س + س←. عـ´ = ع س + ع

الباب الثالث

نظرية التسوير العامة

27 توسيع الصيغ الصورية

يميز المنطق التقليدي بين صنفين من الحدود: الحدود النسبية والحدود المطلقة. ويتميز الحدّ النسبي بكونه لا يصف الأشياء إلا بالنسبة إلى أشياء أخرى ينبغي أن تحدد هي بدورها. فالحدّان: «أب» في «أبو إسحاق» و«شمال» في «شمال المغرب» حدّان نسبيّان. في حين أن ما كنّا نصطلح عليه بالحدود، في الفصل 14، هي حدود مطلقة. يُمكن لبعض الكلمات أن تعمل كحدود نسبية وتستعمل باستمرار كحدود مطلقة أيضًا، بسبب وجود ما يكافئ سورًا وجوديًا مضمرًا في السياق؛ وبذلك نستطيع القول بإطلاق مثلًا، إن إبراهيم أب، قاصدين وجود شخص ما يكون إبراهيم أبًا له.

تستعمل اللغة العربية الحرف «لـ»[1] للإضافة أو للملكية دون أن تفيد الملكية، وبذلك فإن «أبو إسحاق» لا علاقة لها بملكية إسحاق، بل تدلّ على «علاقة أب بـ إسحاق». هناك طريقة لتدقيق الفرق بين «لي» التي تفيد «ملكي» و«لي» التي تفيد النسبة، من خلال التذكير بما قاله ديونيسودوريس (Dionysodorus) لكتيسيبوس (Ctessipus)، بخصوص كلب هذا الأخير: «... إنه أب، وهو لك، إذًا فهو أبوك». (أفلاطون، أوتيديموس (Plato, *Euthydemus*)).

سيكون من الأفضل أن نتحدّث عن الحدود ليس باعتبارها مطلقة أو نسبية، بل بالأحرى باعتبارها واحدية أو متعددة، وخصوصًا اثنانية.

(1) تستعمل اللغة الإنجليزية أدوات الإضافة: «of» لغير العاقل و«'s» للعاقل، في حين أن الأمر لا يكون في اللغة العربية ظاهرًا بنيويًا دائمًا. [المترجم]

يعكس تغيير الاصطلاح تغييرًا في وجهة النظر. إذ ينظر إلى الحد «أب»، كحد نسبي، باعتباره يحيل على إبراهيم فقط، على الرغم من أنه يحيل نسبيًا على إسحاق بطريقة ما. وينظر إلى الحد «أب»، أو «أب لـ» باعتباره حدًا اثنانيًا يصدق على رجلين متساوقين كزوج مرتب، أي إبراهيم وإسحاق.

يمكن للحدّ الاثناني، كما الحد الواحدي، أن يرد بلا تمايز في صيغة فاعل أو صفة أو فعل. ففي العبارة «سـ مُغيث لـ عـ» نستعمل الاسم، وفي «سـ هو غوْث لـ عـ» نستعمل الصفة، وفي «سـ يُغيث عـ» نستعمل الفعل: غير أنه لا حاجة، من الناحية المنطقية، للتمييز بين الثلاثة. إن المهمّ من الناحية المنطقية، أنه إذا كانت الحدود الواحدية «إنسان» و«يمشي» إلخ.، تصدق على القيصر وسقراط، إلخ، كل واحد على حدة، فإن الحد الاثناني «يغيث»، يصدق من ناحية أخرى، على الزوج المسيح ولازارس (Jesus and Lazarus)، ويصدق على زوج العم طوم وحواء الصغيرة. فإذا أردنا أن نكتب، كما فعلنا في الصفحات السابقة، «ك(سـ)» بالنسبة إلى «سـ هو ك»، فإن الترميز المماثل لها الخاص بالحدود النسبية يجب أن يكون «ك(سـ عـ)»، أي «سـ هي ك بالنسبة إلى عـ».

إن ترتيب «سـ» و«عـ» في «سـ يُغيث عـ» عرضي من ناحية: إذ يُمكن أن نعبر عن «سـ يغيث عـ» بقولنا: «عـ يُعينه سـ». غير أن الترتيب، من ناحية أخرى، أسامي في العبارة «سـ يغيث عـ»، لأن العبارة «المسيح يغيث لازارس» مثلًا، لا تكافئ «عـ يغيث سـ». وعليه يُمكن ترجمة العبارة «سـ يعين عـ» إلى الصيغة «ك (سـ عـ)» أو إلى الصيغة «ك (عـ سـ)»، غير أن التأويلات التي نسندها على التوالي إلى «ك» متباينة تباين «يغيث» و«يغيثه». وعمومًا لا يُمكن أن نكافئ بين «ك (سـ عـ)» و«ك (عـ سـ)».

بالإضافة إلى الحدود الاثنانية، نستطيع أن نقرّ بحدود ثلاثية ورباعية وهكذا دواليك: مثال ذلك: «ل (سـ عـ فـ)» التي قد تعني «سـ أعطى عـ لـ فـ».

و«م (سـ، عـ، فـ، ق)» التي قد تعني: «دفع سـ المبلغ عـ لـ فـ مقابل ق».

توجد صور استدلالية، لا تقل صحة منطقية عن تلك التي تناولناها في الباب الثاني، غير أنها تند عن الطرائق الواردة فيه، مناط ذلك ببساطة أن تحليلها يتطلب حدودًا اثنانية. لنضرب لذلك مثالًا استعرناه من يونغيوس (متداول منذ 1640)[1]:

كل الدوائر أشكال ∴ كل من يرسم دوائرَ يرسم أشكالًا.

فإذا كان يُمكن أن نرمز للمقدمة بترميزنا السابق كالآتي: « ∧سـ (ك (سـ) ← ل (سـ))»، فإن النتيجة تضع صعوبات. لاشكّ أننا نستطيع أن نعبر عن النتيجة كالتالي: «∧سـ(م (سـ) ← ن (سـ)(»، حيث تدلّ «م (سـ)» على «سـ يرسم دائرة» و«ن(سـ)» على «سـ يرسم شكلًا»؛ غير أنه لن يظهر في الصيغتين «∧ سـ (ك (سـ) ← ل (سـ))» و« ∧سـ (م (سـ) ← ن (سـ)(» أيُّ ترابطٍ ملحوظٍ يُبرر استنتاج الواحدة من الأخرى. لذا نضطر إلى توسيع مقولة الصيغ المسوَّرة كي تقبل صيغًا من قبيل «م (عـ، سـ)» بالنسبة إلى «عـ يرسم سـ». ومن ثَمَّ ترميز «عـ يرسم دائرة» كالتالي: ∨سـ (ك(سـ) ∧ م (عـ، سـ))، ونرمز للعبارة «عـ يرسم شكلًا» بالصيغة: ∨ سـ (ل (سـ) ∧ م (عـ، سـ)) ؛ ونرمز للنتيجة في مجملها: «كل من يرسم دوائرَ يرسم أشكالًا» كما يلي:

(1) ∧عـ [∨سـ ك (سـ) .∧ م (عـ، سـ) ← ∨سـ (ل(سـ) .∧ م(عـ، سـ))].

تحتاج نظريةُ التسوير إلى توسيعٍ من هذا النوع يُمكننا من البرهنة، بالإضافة إلى أمور أخرى، على أن «∧سـ (ك (سـ) ← ل(سـ))» تستلزم (1).

هناك مثال آخر على ضرورة توسيع نظرية التسوير مفاده:

المقدمة: توجد لوحة تُعجب كلَّ النقاد؛

النتيجة: كلُّ ناقدٍ تُعجبه هذه اللوحةُ أو تلك.

حيث تدلّ «ل(سـ)» على «سـ ناقد» و«م(سـ عـ)» تعني «سـ تعجبه عـ»، وبذلك

(1) يواشيم يونغيوس (Joachim Jungius) (1587-1657). [المترجم]

نستطيع أن نعبر عن «كل ناقد تعجبه ع» بالترميز: «Λسـ (ل(سـ) ← م(سـ ع))». وإذا دلّت «ك(ع)»، على «ع لوحة»، نستطيع أن نعبر عن المقدمة السالفة كالتالي:

(2) Vع [ك(ع) Λ Λ سـ (ل(سـ) ← م(سـ ع))].

ومن ناحية أخرى، ما دُمنا نرمز للعبارة «سـ تعجبه هذه اللوحة أو تلك» بـ «V ع (ك (ع) Λ م(سـ ع))» فإنَّ النتيجة ستتخذ في كليتها الصيغة الآتية:

(3) Λسـ [ل(سـ) ← Vع (ك(ع) .Λ م(سـ ع))].

مثال آخر:

المقدمة: يوجد فيلسوف يعارضه كل الفلاسفة.

النتيجة: يوجد فيلسوف يتعارض مع نفسه

تحوز المقدمة هنا صورة مماثلة تمامًا للصيغة (2).

(4) Vع [ك (ع) .Λ Λسـ (ك(سـ) ← ل(سـ ع))].

والنتيجة ببساطة هي: «Vسـ (ك (سـ) .Λ ل(سـ سـ))».

لقد رأينا في الفصل الثاني والعشرين أن اختلافات التركيب يُمكن أن تؤثّر في دلالة التصوير: ومن ثم يجب التمييز بين «Λسـ (ك(سـ) V ل(سـ))» و«Λسـ ك(سـ) V Λسـ ل(سـ)»، ونميز «Vسـ (ك(سـ) Λ ل(سـ))» عن « Vسـ ك(سـ) Λ Vسـ ل(سـ) ». تفرض اعتبارات من هذا القبيل نفسها بشكلٍ قويّ الآن لأننا أضحينا نحتاج إلى إدراج أسوار ضمن أخرى. وعليه، لننظر في العبارة الآتية:

(5) Λ سـ [ك(سـ) ← Vع (ك(ع) .Λ ل(سـ ع))].

إذا دلّت «ك(سـ)» على «سـ عدد» و«ل(سـ ع)» على «سـ أصغر من ع»، فستدل (5) على:

كل عدد له عدد يكبره،

أو بشكل مختصر «كل عدد يكبره عدد معين». وهو ما يُمكن أن نعيد

صياغته بحذر شديد كالآتي: «عدد ما يكبر كل عدد»، ونرمز إليه كالتالي:

Vع (ع عدد ٨. ع يكبر كل عدد)،

أي (4). والحال أن الفرق الشاسع بين (5) و(4) مماثل للفرق بين الصّدق والكذب، لأن (5) تقر بوجود عدد أكبر بالنسبة إلى كل عدد، وهذا صحيح، بينما تقر (4) بوجود عدد معين كبير، يفوق في الوقت نفسه كلَّ عدد. وهذه العبارة الأخيرة كاذبة لاعتبارين: لأنه لا وجود لأكبر عدد، وحتى إن وجد فلن يتجاوز ذاته.

إن الفرق بين (3) و(2)، من حيث الصيغة، هو نفسه الفرق الذي بيّناه توا بين (5) و(4). أما الصياغة اللغوية للمقدمة والنتيجة المتعلقة باللوحات فتوضّح، مرة أخرى، عجزَ اللغة الطبيعية عن إبراز الفرق. وبذلك فترميز الأسوار، في هذا الصدد، مفيد أكثر.

ويزودنا المفهوم الرياضي للحدّ (Limit)، بالنسبة إلى القرّاء المعتادين عليه، بتوضيح آخر دقيق يخص الفرق المذكور. نقول إن الدالة ك(س) تقترب من الحد حـ عندما تقترب س من خـ إذا وجد بالنسبة إلى كل عدد موجب ع عدد موجب غ بحيث تكون ك(س) بين ع وحـ بالنسبة إلى كل س (≠حـ). وهو الأمر الذي يُمكن إبرازه عبر استعمال لغة الأسوار كالتالي:

Λع {ع > 0 . ← V غ [غ > 0 . Λ Λس (0 < | س - حـ | < غ . ← . |

ك(س)- حـ | < ع)]}.

علينا أن نعتبر ع، كما تؤكّد بحق الكتب المدرسية، الاختيار الأول: بحيث عند كل اختيار لـ ع نختار غ يناسبه. يهدف هذا التحذير، في الواقع، إلى تجنب الخلط بين الصيغة السابقة والصيغة الموالية التي تختلف عنها جوهريًا:

V غ { غ > 0 . Λ Λع [ع > 0 . ← Λس (0 < | س - حـ | < غ . ← . |

ك(س).- حـ | < ع)]}.

سنعرف لاحقًا بأن الفرق بين هاتين الصيغتين يماثل الفرق بين (5) و(4) والفرق بين (3) و(2).

يغدو الاختلاف الجوهري بين (5) و(4) والفرق بين (3) و(2)، أبسط وأبين عندما نجري المقارنة الآتية:

(6) Λسـ Vعـ ك(سـ عـ)، Vعـ Λسـ ك(سـ عـ).

هب أن «ك(سـ عـ)» تعني «سـ وعـ هما الشيء نفسه». عندئذ تصير الصيغة (6(كالآتي:

(7) Λسـ Vعـ (سـ وعـ هما الشيء نفسه)،

(8) Vعـ Λسـ (سـ وعـ هما الشيء نفسه).

أيًا كان الموضوع سـ من الواضح أنه يوجد موضوع هو عينه (أي الموضوع سـ نفسه(. وعليه ستكون العبارة:

V عـ (سـ وعـ هما الشيء نفسه)،

صادقةً. وبالتالي تكون (7) صادقة. في حين، ما دام وُجِد في الكون أكثر من موضوع واحد، فلا موضوع يُمكن أن يكون هو كل موضوع على حدة؛ أي، لا يُمكن أن يوجد الموضوع عـ بحيث:

Λسـ (سـ وعـ هما الشيء نفسه).

وبالتالي تكذب العبارة (8).

وعمومًا تُقرّ«Λسـ V عـ ك(سـ عـ)» أنّه بمجرد ما نختار الموضوع سـ أيًا كان، يحضر موضوع آخر عـ بحيث تصدق ك(سـ عـ)؛ يُمكن للاختيارات المختلفة لـ سـ أن تستثير اختيارات مختلفة لـ عـ. وتقر«V عـ Λسـ ك(سـ عـ)»، من ناحيتها، أنه يُمكن اختيار الموضوع عـ بحيث تكون «ك(سـ عـ)»، بالنسبة إلى هذا عـ نفسه، صادقة بالنسبة إلى كل موضوع سـ.

هب أن لدينا مجالًا متناهيًا من المواضيع، با، جا، ....، ها، ولنقارن بين «Λسـ Vعـ ك(سـ عـ)» و«Vعـ Λسـ ك(سـ عـ)» عندما نقوم بتوسيع الأسوار

إلى وصليات وفصليات (انظر نهاية الفصل 22). تصبح «Λسـ Vعـ ك (سـ، عـ)» أولًا كالتالي:

Vعـ ك(با، عـ) .Λ Vعـ ك(جا، عـ) Λ. ... .Λ Vعـ ك(هـا، عـ)

ثم تصير بعد ذلك:

ك(با، با) V ك(با، جا) V ... V ك(با، ها) Λ. ك(جا، با) V ك(جا، جا) V

... V ك(جا، ها) Λ... .Λ. ك(ها، با) V ك(ها، جا) V ... V ك(ها، ها).

في المقابل تصير «Vعـ Λ سـ ك(سـ عـ)»، أولًا:

Λ سـ ك(سـ با) V Λ سـ ك(سـ جا) V ... V Λ سـ ك(سـ ها).

ثم تغدو في مرحلة ثانية:

ك(با، با) Λ ك(جا، با) Λ. ... .Λ. ك(ها، با) V ك(با، جا) Λ ك(جا، جا) Λ.

... .Λ. ك(ها، جا) V ... V ك(با، ها) Λ. ك(جا، ها) Λ ... .Λ. ك(ها، ها).

لقد أشرنا في الفصل 22 إلى أن اللفظين «شيء ما» و«كل شيء» وإن كانا يردان في اللغة الطبيعية [اللغة الإنجليزية]، في موضع الفاعل، فإن وظيفتهما تنحرف عن الفواعل الحقيقية. هناك أمثلة جديدة عن هذا الانحراف توضحه العبارتان (7) و(8). إذ نستطيع أن نصوغ (7) لفظيًا كالتالي: «كل شيء مماثل لشيء ما»؛ ونعبر عن (8) كالآتي: «شيء ما مماثل لكل شيء». لو كانت «كل شيء» و«شيء ما» تعملان عمل الاسم، لاضطررنا لاعتبار هاتين العبارتين متُكافِئتين، فتكونا بالفعل كاذبتين معًا. والحال أنّ (7) صادقة، كما رأينا، و(8) كاذبة. علاوة على ذلك، لو كان «لاشيء» و«كل شيء» اسمين حقيقيين، لزم أن نعتبر بالتأكيد أن «لاشيء يماثل كل شيء» قولًا كاذبًا. الواقع، أن هذه العبارة تنفي ببساطة (8)، وبالتالي فهي صادقة. كما نستطيع أن نعتبر القول: «كل شيء يماثل كل شيء» مكافئًا لصدق «كل شيء مماثل لنفسه»، في حين أنه يعبر في الواقع عن الكذب:

(9) Λسـ Λعـ (سـ يماثل عـ).

من بين الأسباب التي تجعل التحليل التسويري يساعد على توضيح اعتبار أن أشباه الفواعل «شيء ما»، و«كل شيء»، و«لا شيء» (ومتغيراتها من قبيل «بعض الأشخاص»، و«كل واحد» و«لا أحد»(تترك مكانها لتعبير أقل تغليطًا.

لا ينبغي أن يعتبر التركيب « ٨سـ ٨ع» في (9)كضرب من التسوير المزدوج؛ فالعبارة «٨سـ ٨ع ك(سـ ع)» مجرد تسوير للعبارة « ٨ع ك (سـ ع)» برمتها. في حين تبين (1) -(8) أسوارًا وجوديّة ضمن أسوار كلية والعكس بالعكس، أما (9) فتبرز سورًا كليًّا ضمن تسوير كلي.

لا يدرج الباب الثالث استخدام رموز منطقية جديدة في العبارات. في نهاية الفصل 23، كان لدينا مثال على سرقة سادي من المتاجر، والذي كان مكافئًا لأي عبارة يُمكن صياغتها في الباب الثالث. إن مكاسبنا الجديدة ليست من ناحية العبارات، بل من ناحية الصيغة الصورية. إن الصيغ التي نتوفر علها الآن هي صيغ مسوّرة بشكل عام، وليس فقط الصيغ الواحدية. وهي تتألف من «ب» و«ك(سـ)» و«ك(ع)» و«ل(سـ)» و«م(سـ ع» و«م(ع، سـ)» و«م(سـ سـ)» و«ك(سـ، ع، ف) إلخ، وكل ما يُمكن بناؤه بها بواسطة ترميز الدوال الصدقية والأسوار. إن العناصر النونية – م(سـ ع)» وما يماثلها- هي ما يعتبر جديدًا. (من المعتاد عدم استخدام حرف الحد نفسه مع عدد مختلف من المتغيرات- وبالتالي «ك(سـ)» و«ك(سـ ع، ف)»- داخل الصيغة نفسها أو داخل صيغ للمشكلة عينها. يُمكن وضع الاصطلاحات لتنظيم هذا الاستخدام).

على الرغم من أن الإغناء يمسّ الصيغ فقط، فإنّه مهمٌ للغاية. إنه يُمكننا من إنشاء -كما أشرنا إلى ذلك- لزومات جديدة بين العبارت. يشكّل المجال الموسَّع للصيغ دعامة لمفهوم موسع للصحة، وبالتالي للّزُوم، إلى حد أنه يتجاوز حدود الباب الثاني بحيث لا تغدو أي معالجة مماثلة قابلة للتطبيق

عليه. وعليه، لا يُمكن وضع أي طريقة للبت في صحة الصيغ المسورة بشكل عام. (انظر الفصل 34) ويسري الشيء نفسه بالطبع على الاتساق واللزوم والتكافؤ.

يظل تعريف الصحة بلا تغيير: صدق كل التأويلات في كل مجالات القول غير الفارغة. كما لا تتغير تعاريف الاتساق واللزوم والتكافؤ. يكمُن تفسير حرف الحد، كا هو الحال بالنسبة إلى الحد الواحدي، في تحديد الأشياء التي يصدق عليها الحرف في مجال القول. أما بالنسبة إلى الحدود النونية، يكمُن ذلك في إقرار الزوج أو الثلاثي وما إلى ذلك، الذي يصدق عليه الحرف.

إن استحالة إجراء طريقة البتّ في الصحة لن يمنعنا من تطوير إجراءات البرهنة على الصحة. يتمثل الاختلاف، كما هو مذكور في الفصل 13، في أن طريقة البتّ تضمن إجابة إيجابية أو سلبية في كل مرة، بينما تضمن طريقة البرهنة في أفضل الأحوال إجابة إيجابية نهائية حيثما تكون الإجابة الإيجابية من الأمور الطبيعية. ستشكّل طرائق البرهنة في نظرية التسوير العامة أساس الباب الثالث.

لمحة تاريخية: قدّم دي مورغان سنة 1864 جبرا للعلاقات وطوّره بيرس سنة 1870 بشكل كبير. تمثل علاقته بنظرية التسوير المتعددة، عمومًا، ما يمثله جبر الفئات لبول بالنسبة إلى نظرية التسوير الواحدية، وإن كان مداه، كما بيَّن ذلك كورسيلت (Korselt) سنة 1914[1]، ليس واسعًا بالقدر نفسه. وقد أصبحت النظرية التامة للتسوير في المتناول بفضل فريغه حوالي 1879.

(1) انظر فان هايينورت:
van Heijenoort, pp. 229, 233.

تمارين

1. هب أن لدينا المجال المحدود با، جا،... ها، حوِّل العبارات المسوّرة التالية إلى فصليات وإلى وصليات في كل واحدة من الأمثلة الآتية:

Λسـ Λعـ ك(سـ عـ)، Vسـ Vعـ ك (سـ عـ)،

Λعـ Λسـ ك(سـ عـ)، Vعـ Vسـ ك(سـ عـ).

قم بالعملية، في كل مرّة، عبر مرحلتين.

2. أعد كتابة العبارتين التاليتين مستعينًا بالتسوير:

كل جسم صلب يذوب في هذا السائل أو ذاك،

يوجد سائل يذوب فيه كل جسم صلب.

3. أعد كتابة هذا المثال (الذي يعود إلى دي مورغان) مستعينًا بالتسوير:

إذا كانت كل الخيول حيوانات فإن كل رؤوس الخيول رؤوس حيوانات.

4. عبِّر، مستعينًا بالتسوير، عن التأويل الأكثر مقبولية للعبارة:

كان لديها خاتم في كل إصبع.

5. بافتراض أن «ك» تعني «فعل الشر» وأن مجال القول هو الناس، ترجم إلى اللغة الطبيعية بطريقة غير ملتبسة ما يلي:

Vسـ Λعـ (ك(عـ سـ))،

Λسـ (Vعـ ك(سـ عـ) ← ك(سـ سـ)).

Λسـ [Λعـ (ك(عـ سـ) ← ك(سـ عـ)) ← ك(سـ سـ)].

6. قم بالبت صدقيًا في العبارات التالية علما أن مجال القول لا يشمل سوى نقط خط لامتناه، ثم فسِّر استدلالك.

Vسـ Λعـ Vهـ (سـ توجد ما بين عـ وهـ)،

Λعـ Vسـ Vهـ (سـ توجد ما بين عـ وهـ)،

Vسـ Vهـ Λعـ (سـ توجد ما بين عـ وهـ).

7. عبِّر صوريًا عن العبارات التالية مستعينًا بالتسوير وعيِّن قيمها الصّدقية:

لاشيء مماثل للاشيء،

شيء ما مماثل لشيء ما،

كل شيء يماثل لاشيء،

لاشيء يماثل أي شيء.

28 توسيع الإنابة

رأينا في الفصل السادس والعشرين أن اشتقاق العبارات عن طريق الإنابة في الصيغ المسوّرة الواحدية أمرٌ معقّدٌ ودقيقٌ إلى حد ما، ورأينا أنه يُمكن إدارته بسلاسة من خلال استبدال مجردات أحرف الحدود. الآن وقد انتقلنا إلى الصيغ المتعددة، من المتوقع حدوث تعقيد أسوأ. إذ كيف يجب أن ترتبط العبارت الممثلة بـ «ك(سـ، عـ)» و«ك(عـ، سـ)» و«ك(سـ، سـ)» ببعضها البعض؟ يجب أن نكون قادرين على الإقرار، على سبيل المثال، بأن العبارة:

(1) Vسـ (عـ يسلّي سـ أكثر مما يسلي عـ سـ)

V Vسـ (سـ يسلي عـ أكثر مما يسلي عـ سـ)

.← Vسـ (سـ يسلي سـ أكثر مما يسلي عـ سـ)

هي نتيجة صحيحة للإنابة في الصيغة:

(2) Vسـ ك(سـ، عـ) V Vسـ ك(عـ، سـ) .← Vسـ ك(سـ، سـ).

لحسن الحظ، إن الحل هو نفسه كما كان من قبل. إن المساعد المناسب هو مرة أخرى مجرد الحد، ولكنه متعدد، أي «{سـ، عـ: ... سـ ... عـ ...}»، «{سـ، عـ، هـ: ... سـ ... عـ ... هـ ...}»، إلخ. للحصول على (1) ، يجب استبدال المجرد الآتي بـ «ك»:

{هـ، فـ: فـ يسلي هـ أكثر مما يسلي عـ فـ}.

علينا فقط أن نضعها بدل «ك» في جميع المواضع الثلاثة ثم ننتقل إلى التشخيص بطريقة واضحة: في أول المواضع الثلاثة، تفسح المتغيرات

المقيدة «هـ» و«ف» المجال لـ «س» و«ع». وفي الموضع الثاني تفتح المجال لـ «ع» و«س» . وفي الثالث لـ «س» و«س».

يظل القيدان الواردان في الفصل 26 ساريين. يؤكد الفحص أن المثال الحالي مناسب لهذا الغرض.

في حالة المحمول الواحدي، تُعدُّ مجردات الحدود تنظيمًا للجمل الموصولة العادية. في حالة المحمولات المتعددة تكون متشابهة؛ إنها توسيع متعدد للجمل الموصولة. تفتقر لغتنا العادية إلى الجمل الموصولة المتعددة، ويمكن للمرء أن يرى السبب جزئيًا. تتمتع الجمل الموصولة بمعظم فائدتها في سياقات مكافئة للتسوير: السياقات التي يحكمها بالفعل العامل «V» أو «Λ». لكن الجملة الموصولة المتعددة لا تقدم أيَّ ميزة عندما يحكمها «V» أو «Λ»، لأنه يُمكن إنجاز العمل نفسه بجمل موصولة واحدية متداخلة تخضع بشكل منفصل لـ «V» أو«Λ». على سبيل المثال:

V {س، ع: س أنقذ ع من الغرق}

تعادل العبارات الواحدية «هناك شخص أنقذ شخصًا كان يغرق»، أو:

V{س: V {ع: س أنقذ ع من الغرق}}.

بعبارة أخرى، إن التأليف «V{س، ع:» يعادل فقط السورين المتكررين «V س Vع:»؛ والأمر نفسه بالنسبة إلى «Λ {س، ع:». غير أنّه إذا كانت الجمل الموصولة المتعددة تقدّم القليل للخطاب العادي، فهي هبة من السماء لنظرية الإنابة.

هنا، كما هو الحال في تجريد الحد الواحدي، استندت إلى ترميز نظرية المجموعات. إن الترميز «{س، ع: ... س ... ع ...}» معيارٌ للعلاقات، التي تفسّر على أنها فئات من الأزواج المرتبة. تنطبق ملاحظات موازية لتلك الواردة في نهاية الفصل 21 مرة أخرى هنا.

وقد لوحظ في نهاية الفصل السابع أن الصحة يُمكن أن تُنسَب ليس

فقط إلى صيغ الدوال الصدقية ، بل أيضًا، بواسطة التوسيع، إلى العبارات التي تصوّر أشكالها تلك الصيغ؛ ولكن من الجيد إذًا إضافة صفة «الدالة الصدقية». في المقابل، تكون العبارة، التي يُمكن الحصول عليها عن طريق الإنابة في صيغة مسوّرة صحيحة، صحيحة من الناحية التسويرية. تكون مثل هذه العبارة صادقة أو صادقة بالنسبة إلى جميع قيم متغيراتها المطلقة. لكنها قد تكون أو لا تكون صحيحة صدقيًا؛ فقد يعتمد صدقها فقط على بنية دالتها الصدقية، أو قد يعتمد جزئيًا على كيفية ترتيب الأسوار.

قد نلاحظ أيضًا درجة وسطى، أي الصحة الواحدية. تكون عبارة ما صحيحة تسويريًا إذا أمكن الحصول عليها عن طريق الإنابة في صيغة مسوّرة صحيحة؛ وتكون صحيحة واحديًا، وبشكل أكثر تحديدًا، إذا أمكن الحصول عليها عن طريق الإنابة في صيغة مسوّرة صحيحة تكون واحدية؛ وتكون صحيحة صدقيًا إذا أمكن الحصول عليها عن طريق الإنابة في صيغة صدقية صحيحة.

تسري ملاحظات مماثلة على اللزوم الحاصل بين العبارات: يُمكن أن يكون تسويريًا، وواحديًا على وجه الخصوص، بل صِدقيٌّ بشكل أكثر تحديدًا. والأمر نفسه بالنسبة إلى عدم الاتساق.

تأخذ الإنابة في الصيغة أيضًا اتجاها آخر وتخدم غرضا آخر: إنابة صورة في الصورة لإنتاج المزيد من الصيغ. تمت ملاحظة سمة بارزة لهذه الإنابة على مستوى الدالة الصدقية في الفصلين 6 و13 مفادها أن الإنابة في الصيغة الصحيحة تنتج صيغة صحيحة.

لقد أشرنا توًا إلى أن العبارة المسوّرة الصحيحة قد تكون أو لا تكون، بشكل أكثر تحديدًا، صحيحة واحديًا أو حتى صدقيًا. تنطبق الآن تمييزات مماثلة على الصيغ المسورة نفسها. إذ يُمكن أن تكون الصيغة المتعددة الصحيحة صحيحة واحديًا، بمعنى تنجم بواسطة الإنابة عن صيغة

واحدية صحيحة. مثال ذلك: «⋀سـ ل(سـ عـ) ← ل(عـ عـ)»، التي تنجم عن «⋀سـ ك(سـ) ← ك(عـ)». وبالطبع قد تكون الصيغة المسوّرة صحيحة صدقيًّا.

عندما كنا نحصل على عبارت عن طريق الإنابة، ما كنا نستبدله هو الأحرف القضوية والأحرف الحدية بمجردات الحد. إن ما نستبدله، للحصول على الصورة بواسطة الإنابة، هو الأحرف القضوية بالصيغ الصورية ثم أحرف الحدود بمجردات الحدود؛ غير أن مجردات الحدود أضحت الآن شكلية. مثال ذلك: «{فـ ل(فـ) ∨ ⋁هـ م(هـ فـ) }». تتم إنابة «ك» بهذه في «⋀سـ ك(سـ) ← ك(عـ)» بالطريقة والقيود المشار إليها، فتُنتج:

(3) ⋀سـ (ل(سـ) ∨ ⋁هـ م(هـ، سـ)) ←. ل(عـ) ∨ ⋁هـ م(هـ، عـ).

مثال آخر: إنابة «{فـ ل(فـ) ∨ ¬م(فـ)}» بـ «ك» و«ل(عـ)» بـ «ب» في:

(4) ⋀سـ(ك(سـ) ← ب) ↔. ⋁سـ ك(سـ) ← ب

تنتج:

(5) ⋀سـ (ل(سـ) ∨ ¬م(سـ) .← ل(عـ)) ↔. ⋁سـ (ل(سـ) ∨ ¬م(سـ)) ← ل(عـ).

تشكل فائدة الإنابة هنا، كما في الباب الأول، وسيلة لاشتقاق صيغ صحيحة من صيغ صحيحة أخرى. على سبيل المثال، نظرًا لأننا حصلنا على (3) و(5) عن طريق الإنابة في الصيغ التي تبيّنت صحتها في الفصل 25، فإننا نستنتج أن (3) و(5) صحيحتان.

يمكن الاعتماد على الإنابة لنقلِ الصحة للأسباب الأساسية التي سبق ذكرها في الفصل 6. ومع ذلك سيكون من الجيد أن نفحص مجددًا هذا الأمر الآن ضمن هذا السياق الجديد. بادئ ذي بدء، دعونا نرَ لماذا تُنتج الإنابة التي أجريناها أعلاه على (4) نتيجة صحيحة. تعني صحة النتيجة (5)

أنها صادقة بالنسبة إلى جميع تأويلات «ل» و«م» وبالنسبة إلى المتغير المطلق «ع». داخل مجال قول غير فارغ. هب أن لدينا مجالًا محددًا ونعتبر أي خيار معين خ لهذه التأويلات، ونود التأكد من كون (5) صادقة بالنسبة إلى خ. ولهذه الغاية نشتق من خ التأويلات الآتية للأحرف التصويرية لـ (4): تؤَول «ك»، باعتبارها تصدق فقط على الأشياء بحيث «ف: ل(س) ٧ ← م(ف)» تصدق بالنسبة إلى خ؛ ونُؤوِّل «ب» باعتبارها ذات القيمة الصدقية التي تحوزها «ل(ع)» بالنسبة إلى خ. يجب على (4)، باعتبارها صحيحة، أن تصدق بالنسبة إلى هذه التأويلات؛ وحيث إن (5) تقتصر على تكرار (4) بالنسبة إلى هذه التأويلات نفسها، فستكون، هي الأخرى، صادقة.

وبشكل أعم، هب أن صيغة عبارة عا' حصلنا عليها بعد إنابة في عا. بحيث يكون لكل متغير مطلق ولكل حرف تصويري متضمّن في عا ما يقابله من بين العناصر المكونة لـ عا'؛ يكون هذا المقابل، في كل حالة، إما الحرف نفسه مُعادًا، وإمّا صيغة عبارة مستبدلة، وإمّا حرفًا حديًا وإمّا مجردًا. والآن، ما دام لدينا اختيار ما خ للتأويلات بالنسبة إلى المتغيرات المطلقة والأحرف التصويرية لـ عا'، دعونا نتبنَّ كتأويل لكل متغير مطلق، أو لكل حرف تصويري لـ عا، التأويل نفسه الذي سبق أن أسندناه إلى مقابله بموجب خ. وعندما نؤوّل عا على هذا النحو، تكون مطابقة لـ عا' كما تم تأويلها بموجب خ. وبما أن الأمر يسري أيضًا على كل اختيار لـ خ، نرى أن عا' صحيحة (أو صادقة بالنسبة إلى كل التاويلات) إذا كانت عا صحيحة.

تكمن وظيفة القيدين المفروضين على الإنابة في الفصل 26 في كونها تضمن كون المتقابلات التي تكلّمنا عنها توًا تتطابق فعلًا. لننظر الآن في بعض الأمثلة كي نبين كيف يُمكن للإنابة أن تفشل في نقل الصحَّة عندما تخرق القيدين.

ينتج عن إنابة «{هـ: ٧ع ل(هـ، ع)}» بـ «ك» في «٨س ك(س) ← ك(ع)»، عندما يتم خرق القيد الأول:

(6) Λسـ Vعـ ل(سـ عـ) ← Vعـ ل(عـ عـ). (غير صحيحة)

يتبين كون هذه العبارة غير صحيحة، رغم صحة «Λسـ ك(سـ) ← ك(عـ)»، عندما نحصر مجال القول في الأعداد، ونؤول «ل» بـ«أصغر من»؛ عندئذ يصدق مقدِّم (6) («كل عدد له عدد أكبر منه»)، في حين يكذب تاليها.

وينتج عن إنابة «{هـ: ل(سـ هـ)}» بـ «ك» في «Λسـ ك(سـ) ← ك(عـ)»، عندما يتم خرق القيد الثاني، ما يلي:

(7) Λسـ ل(سـ سـ) ← ل(سـ، عـ). (غير صحيحة).

يمكن تبين عدم صحة هذه العبارة عندما نؤوِّل «ل» بـ «مماثل لـ»: عندئذ ستقول (7) ما يلي «إذا كان كل شيء مماثلًا لذاته، فإن سـ مماثل لـ عـ»، وهذا ظاهر كذبه بالنسبة إلى كل اختيار لـ سـ ولـ عـ في حين، إذا رغبنا في إعادة صياغة هذا الإبطال بوضوح أكثر عن طريق ربطه بتعريف الصحة سنقول: عندما نتبنى مجالًا يتكوّن من موضوعين أو أكثر، ونأخذ أحد هذه المواضيع كتأويل لـ «سـ» المطلقة في (7)، ثم نأخذ موضوعًا مختلفًا كتأويل لـ «عـ»، ونؤول «ل» باعتبارها «مماثل لـ»، ستكذب عندئذ (7).

إن العبارتين «ل(سـ) v Vهـ م(هـ سـ)» و«ل(عـ) v Vهـ م(هـ، عـ)»، في العبارة (3)، اللتين أبدلنا بهما كلًّا من «ك(سـ)» و«ك(عـ)»، في «Λسـ ك(سـ) ← ك(عـ)»، عبارتان متناظرتان بالنسبة إلى «سـ» و«عـ»: تتضمن إحداهما «سـ» حيثما وفقط حيثما تتضمن الأخرى «عـ». في المقابل، نجد في الإنابة غير الصحيحة التي قادتنا إلى (7)، العبارتين «ل(سـ، سـ)» و«ل(سـ عـ)» اللتين أبدلنا بهما «ك(سـ)» و«ك(عـ)» خاليتين من هذا التناظر: لأن «ل(سـ، عـ)» لا تتضمن «عـ» حيثما «ل(سـ، سـ)» تتضمن «سـ». يجب أن يتفطن القارئ إلى أن غياب هذا التناظر لا علاقة له بعدم صحة (7). وعمومًا ليس من الضروري أن تتضمن العبارة التي تنوب عن «ك(سـ)» «سـ» حيثما وفقط حيثما تضمّنت العبارة التي تنوب عن «ك(عـ)» «عـ». من المناسب جدًّا أن

نبدل، مثلًا، «{هـ: ل(هـ، ع)}» بـ «ك» في «Λسـ ك(سـ) ← ك(ع)» ثم نستدل على صحة:

(8) Λسـ ل(سـ، ع) ← ل(عـ، ع)

(مثلًا: «إذا كان الكل يكره عـ، فإن عـ يكره ذاته»). على الرغم من عدم التناظر بين «ل(سـ، ع)» و«ل(عـ، ع)» بالنسبة إلى «سـ» و«عـ»، فإن (8) تعدّ حالة خاصة وأصلية من «Λسـ ك(سـ) ← ك(ع)»، باعتبارها تعكس عند المقارنة اللفظية بشكل مباشر: «إذا كان كل شيء هو ك، فإن عـ هي ك»: و«إذا كان كل شيء هو ل تقال عن عـ، فإن عـ هي ل تقال عن عـ»: أي «إذا كان الجميع يكره هيربيرت فإن هيربرت يكره هيربيرت».

ولنتيقن من صحة الإنابة نحتاج إلى النظر في النقط التالية فقط: علينا أن نكون قادرين، متى تطلب الأمر ذلك، على تخصيص صيغة العبارة الفعلية أو الحرف الحدّي أو المجرد ذي ن-موقع (نوني الموقع) الذي استبدل بالحرف القضوي أو الحرف الحدي نوني المواقع: يجب علينا أن نتيقن من كونها أدخلت في كل موقع للحرف: وعلينا أن نتيقن من أنه في كل نقطة أُدخل فيها المجرد تكون المتغيرات الخاصة المرافقة للحرف الحدي قد وضعت مكان متغيرات التجريد. وأخيرًا، علينا أن نتيقن من أن الإنابة لم تؤدِّ إلى أي تقييد جديد للمتغيرات من قبل الأسوار، لأنها ستخرق بذلك القيدين.

لننتقل الآن من «Λسـ ك(سـ) ← ك(ع)» إلى صيغة أخرى صحيحة بشكل جلي، أعني «ك(ع) ← V سـ ك(سـ)»: ومن هذه الصيغة يُمكننا أن ننتقل إلى:

(9) ل(عـ، ع) ← Vسـ ل(سـ، ع)

بواسطة الإنابة المشروعة لـ «{هـ: ل(هـ، ع)}» بـ «ك»، في حين سيكون من اللامشروع إنابة «{هـ: ل(سـ، هـ)}» بـ «ك» ثم ننتقل بالتالي إلى:

(10) ل(سـ، ع) ← Vسـ ل(سـ، سـ) (غير صحيحة).

إن المثال المناسب جدًّا لـ (9) هو «إذا كان هيربيرت يكره نفسه فهناك

شخص ما يكره هيربيرت»، وهو أمر غير متوقع على الإطلاق. في حين أن المثال المتعلق بـ (10) سيكون هو «إذا كان أموس هو عم هيربيرت فهناك شخص ما هو عم نفسه». لنشر إلى أنه بالرغم من أن مبادئ الإنابة نفسها تسري هنا مثلما في السابق، فإن الأزواج (9) و(10) تقابل ظاهريًا (8) و(7): إذ إنّ الصيغة الصحيحة (8) تشمل متغيرات متمايزة في المقدم، في حين يحصل العكس في الصيغة الصحيحة (9).

وكلما تعلق الأمر بالإنابة في مثالينا الخاصّين «Λسـ ك(سـ) ← ك(ع)» و«ك(ع) ← Vسـ ك(سـ)»، نلحظ أن التأثير الخالص لقيدينا هو ما يلي فقط: يجب أن تكون الصورتان اللتان تحلان محل «ك(سـ)» و«ك(ع)»، متماثلتين تقريبًا باستثناء اشتمال الواحدة على المتغير المطلق «ع» حيثما تشتمل الثانية على المتغير «س» المطلق. يُمكن أن تشتمل الصيغتان على مواقع مطلقة أخرى لـ «ع»، كما لاحظنا في (8) و(9)). لنفرض أن الصيغتين «... عـ..عـ..» و«...سـ...عـ..» يُمكن أن تنوبا عن «ك(ع)» و«ك(سـ)» في العبارتين «Λسـ ك(سـ) ← ك(ع)» و«ك(ع) ← Vسـ ك(سـ)» عبر إنابة «{هـ:...هـ...عـ..}» بـ «ك». وعليه، ما دام الأمر تعلّق بالإنابة فقط في «Λسـ ك(سـ) ← ك(ع)» و«ك(ع) ← Vسـ ك(سـ)»، نستطيع أن نكف عن التفكير في المجردات، بدل أن نقوم مباشرة بإنابة «ك(سـ)» برمتها بأي صيغة عبارية عا تتضمن المتغير «سـ» المطلق، ثم إنابة «ك(ع)» بالصيغة عا التي تماثل عا باستثناء كونها تتضمن المتغير «ع» المطلق في موضع كل متغير مطلق «سـ».

هذه، إذًا، هي العلاقة الترميزية بين الصيغ القضوية التي تناسب الأدوار الخاصة بكل من «Λسـ ك(سـ)» و«ك(ع)» في «Λسـ ك(سـ) ← ك(ع)»، أو «V سـ ك(سـ)» و«ك(ع)» في «ك(ع) ← Vسـ ك(سـ)». إنّ لها اسمًا: تُسمّى صيغةٌ ما تعيينًا لأخرى. إن «ك(ع)» تعيين لـ «Λسـ ك(سـ)» و«Vسـ ك(سـ)». وينطبق المصطلح بالطبع كذلك، حيثما يتم استخدام أحرف أخرى غير «سـ» و«ع».

ومن ثَمَّ فإن «ك(ف)» تعيين لـ «Λع ك(ع)» و«Vع ك(ع)». بالإضافة إلى أن «ل(ف، ف)» تعيين لـ «Λع ل(ف، ع)»، ولـ «Vع ل(ف، ع)»، ولـ «Λع ل(ع، ع)»، ولـ «Vع ل(ع، ع)»، ولـ «Λع ل(ع، ف)»، ولـ «Vع ل(ع، ف)». ومن ناحية أخرى ، إن «ل(ف، ع)» ليس تعيينًا لـ «Λع ل(ع، ع)» أو لـ «Vع ل(ع، ع)».

يمكن أن نعرض الوصف العام كالآتي: يُطابق تعيين التسوير تمامًا الصيغة المهملة القديمة التي تلي السور، باستثناء أنه قد يُظهر متغيرًا مختلفًا بدلًا من تكرار متغير ذلك السور. إذا أظهر متغيرًا مختلفًا، فيجب أن يُظهره في جميع المواقع (على الأقل) حيث كان المتغير القديم مطلقًا في الصيغة المهملة القديمة التي تلي السور. علاوة على ذلك، يجب أن تظهره مطلقًا في تلك المواقع. سيتعرف القارئ في هذه المطالب على تأثيرات القيود التي تخضع لها إنابة أحرف الحدود.

يلزم عن السور الكلي كل واحد من تعييناته، ويلزم السور الوجودي عن كل واحد من تعييناته. تلك هي اللزومات التي تلزم عن الإنابة في الصيغتين الصحيحتين: «Λس ك(س) ← ك(ع)» و«ك(ع) ← Vس ك(س)».

عندما نستبدل «ك» في الصيغتين المحصورتين الصحيحتين:

(11) Λع (Λس ك(س) ← ك(ع)) (13) Vع (ك(ع) ← Λس ك(س))،

(12) Λع (ك(ع) ← Vس ك(س)) (14) Vع (V س ك(س) ← ك(ع))

إن تأثير القيدين (في الفصل 25، وخاصة التمرين الأول)، أكثر صرامة: يجب أن تكون الصيغتان اللتان تحلان محل «ك(ع)» و«ك(س)» هنا متماثلةً، باستثناء أن إحديهما لها ورودات مطلقة لـ «ع» حيثما وفقط حيثما يكون للأخرى «س» مطلق. لأن القيد الثاني يفرض على المجرد المُستبدَل بـ «ك» أن يكون خلوًّا من «ع» المطلق، في ضوء الأسوار الأولية في (11)-(14).

هكذا، إذا كان مسموحًا باستبدال {ه: ل(ه، ع)}» بـ «ك» في «Λس ك(س) ← ك(ع)» و«ك(ع) ← Vس ك(س)» للحصول على (8) و(9)، فإنه يُحظر

إجراء الإنابة نفسها في (11)-(14) للحصول على:

(15) Λ ع (Λسـ ل(سـ، ع) ← ل(عـ، ع))، (17) Vعـ (ل(عـ، ع) ← Λسـ ل(سـ، ع)) (غير صحيحة)

(16) Λ عـ(ل(عـ، ع) ← Vسـ ل(سـ، ع))، (18) Vعـ Vسـ ل(سـ، ع) ← ل(عـ، ع) (غير صحيحة)

ويمكن أن تكون (15) و(16) صحيحتين في جميع الأحوال، لمجرد كونهما قيودًا كلية للصيغتين المهملتين الصحيحتين (8) و(9). أما (17) فغير صحيحة، إذ عندما نتبنى مجالًا مكونًا من موضوعين أو أكثر، ونؤوِّل «ل» بـ «مماثل لـ». «حيث تصدق «ل(عـ، ع)» وتكذب «Λسـ ل(سـ، ع)» بالنسبة إلى كل موضوع عـ؛ ومن ثم تكذب (17). أمَّا كون (18) غير صحيحة، فيتبين ذلك عندما نؤوِّل «ل» باعتبارها «مختلف عن».

لمحة تاريخية: لا علم لي بأية صياغة تامة وسليمة للإنابة بالنسبة إلى الأحرف الحدية المتعددة قبل تلك التي قام بها هيلبرت (Hilbert) وبيرنايس (Bernays) سنة 1934. إن الدور المساعد الذي تلعبه المجردات في طريقتي الحالية كانت تلعبه في طريقتهم الصيغ المسماة الأشكال الاسمية (Nennformen). استخدمتُ لهذا الغرض، في كتابي المنطق الأولي، صيغًا مساعدة من نمط آخر. كانت تحتوي على أرقام محاطة بدائرة سمِّيت بالاستنسل (stencils)، أو في الطبعة الثانية من ذلك الكتاب وثلاث طبعات من هذا الكتاب، المحمولات. إنه لمن دواعي سروري الآن ذكر المجرد متعدد الاستخدامات وإبعاد تلك التدخلات. ويعود القيدان المفروضان على الإنابة إلى كتابي المنطق الأولي، 1941؛ لقد لبى هيلبرت وأكرمان تلك الاحتياجات من خلال حيلة أكثر صرامة تتمثل في استخدام أجزاء مختلفة من الأبجدية بالنسبة إلى متغيراتها المقيدة والمطلقة.

تمارين

1. عيّن أي التجريدات التالية يُمكن إنابتها بـ «ك» في «Vسـ ك(سـ، ع)» بانسجام مع قيود الإنابة:

{هـ ف: فـ يمدح فـ لـ هـ}، {هـ ف: فـ يمدح عـ لـ هـ}،
{هـ ف: فـ يمدح هـ لـ هـ}، {هـ ف: Vعـ (فـ يمدح عـ لـ هـ}،
{هـ ف: فـ يمدح سـ لـ هـ}، {هـ ف: Vغـ (فـ يمدح غـ لـ هـ)}.

عبر عن نتائج هذه الإنابات باللغة الطبيعية مفترضًا أن مجال القول محدود في الإنسان.

2. قم بجرد لكل الصيغ التي يُمكن البرهنة على صحتها بالإنابة المشروعة لإحدى الصيغ الموالية:

{هـ: ل(سـ، هـ) V ل(هـ، ع)}، {هـ: ل(عـ، هـ) V ل(هـ، ع)}،
{هـ: ل(سـ، هـ) V ل(هـ، سـ)}، {هـ: Vعـ (ل(عـ، هـ) V ل(هـ، ع))}،

بـ «ك» في «Λسـ ك(سـ) ← ك(ع)»، أو«ك(ع) ← Vسـ ك(سـ)»، أو (4)، أو (13)، أو (14). هب أن مجال القول هو أعضاء المجلس وتأويل «ل» هو «شجب» و«ب» هي «التدابير التي يجب أن تتخذ». عبّر عن النتائج باللغة الطبيعية.

3. بين أي الصيغ التالية نحصل عليها بكيفية مشروعة بواسطة الإنابة انطلاقًا من «Λسـ ك(سـ) ← ك(ع)»، أو «ك(ع) ← Vسـ ك(سـ)»، أو (4)، أو (13)، أو (14). عيّن، في كل حالة، المجرد المُستبدَل:

Λسـ ك(سـ، سـ) ← ك(عـ، ع)، ل(عـ، سـ) ← Vسـ ل(سـ، ع)،
Vسـ (ل(سـ، سـ) ← V عـ ل(عـ، ع))، Vعـ (ل(ع) .Λ م(هـ) .←. Λسـ ل(سـ) Λ م(هـ))،
Λسـ (ل(عـ، سـ) ← م(سـ، هـ)) ←. ل(عـ، ع) ← م(عـ، هـ)،
ل(سـ، ع) Λ م(عـ، هـ) .← Vسـ (ل(سـ، سـ) .Λ م(سـ، هـ)).

ل(عـ) ∧. ∧هـ (ل(عـ) ← ل(هـ)) . ← ∨سـ [ل(سـ) .∧ ∧هـ (ل(سـ) ←
ل(هـ))]،

∧سـ [∧عـ (ل(سـ، عـ) ← ل(عـ، عـ)) ← ل(عـ، عـ)] ↔ . ∨سـ ∧عـ (ل(سـ،
عـ) ← ل(عـ، عـ)) ← ل(عـ، عـ).

29 الصور الوجودية الخالصة

يمكن تعريف اللزوم، في النظرية العامة لمنطق التسويرات، كما في غيرها، باعتباره صحّة الشرط. ولتعليل استنتاج من قبيل ذلك الوارد في الفصل السابع والعشرين حول الفيلسوف، علينا أن نبرهن على صحة الشرط. وعليه، سيكون الشرط المناسب في هذا المثال هو:

(1) Vع [ك(ع) . ∧ ∧س (ك (س) ← ل(س، ع)] ← Vس (ك(س) . ∧ ل(س، س))

(انظر (4) في الفصل 27). فإذا نحن حوّلناها إلى صيغة مسورة شاملة، سنحصل على:

∧ع Vس Vهـ (ك(ع) . ∧ ك (س) ← ل(س، ع) .←. ك(هـ) . ∧ ل(هـ، هـ).

وقد نحصل على صيغ مسورة شاملة أخرى متُكافِئة، لكن هذا سيفي بالغرض. وبما أن الصحة هي ما يهمنا، فبإمكاننا أن نحذف «∧ع»؛ لأننا نعلم أن السور الكلي الأولي لا يؤثر في الصحة. إن ما نريد البرهنة عليه، إذًا، هو صحة ما يلي:

(2) Vس Vهـ (ك(ع) . ∧ ك(س) ← ل(س ع) .←. ك(هـ) . ∧ ل(هـ، هـ).

فلنحاول، الآن، أن نجري التجربة التالية: لنبدل المتغير المطلق «ع» بالمتغيرات الوجودية مع حذف الأسوار. ستكون النتيجة:

(3) (ك(ع) . ∧ ك(ع) ← ل(ع، ع) .←. ك(ع) . ∧ ل(ع، ع)

صحيحة صدقيا. تثبت هذه النتيجة، إذا تم عرضها بشكل صحيح، صحة (2) ومن ثم صحة (1). وذلك لكون (3) تعيين لـ

Vهـ (ك(ع) . ∧ ك(ع) ← ل(ع، ع) .←. ك(هـ) . ∧ ل(ع، ع))

وبالتالي فهي تستلزمها، والتي تستلزم بدورها (2).

إن مصفوفة الصيغة المسوّرة الشاملة هي ما يأتي بعد الأسوار. والصيغة الوجودية الخالصة هي الصيغة المسورة الشاملة التي لا تتوفر سوى على الأسوار الوجودية. ما يفيدنا به المثال السابق، إذًا، هو أنه إذا كانت الصيغة الوجودية الخالصة تتضمن متغيرًا مطلقًا واحدًا فقط، وكانت إنابة هذا المتغير بمتغيرات وجودية يجعل المصفوفة صحيحة صدقيًا، فإن الصيغة الوجودية الخالصة صحيحة.

بإمكاننا أن ندعي أكثر من هذا: تكون الصيغة الوجودية الخالصة صحيحة فقط إذا جعلت هذه الإنابة المصفوفة صحيحة صدقيًا؛ قد نفهم السبب بطريقة أحسن من خلال مثال آخر. لنعدل (2) بما يكفي لإفسادها:

(′2) Vسـ Vهـ (ك(ع) . ∧ ك(س) V ل(س، ع) .←. ك(هـ) . ∧ ل(هـ، هـ).

إن إنابة «ع» بـ «س» و«هـ» في المصفوفة (′2) تنتج:

(′3) ك(ع) . ∧ ك(ع) V ل(ع، ع) .←. ك(ع) . ∧ ل(ع، ع)،

التي يُمكن، بدل أن تكون صحيحة صدقيًا، إبطالها بإسناد ص إلى «ك(ع)» وك إلى «ل(ع، ع)». غير أن (′2) تتلخص في (′3) ضمن مجال قول يشمل موضوعًا واحدًا فقط ع وستكون (′2) كاذبة، إذًا، في هذا المجال إذا أوّلنا «ك» و«ل» بحيث تصدق ك(ع) ول(ع، ع). هكذا تكون (′2) غير صحيحة: ليست صادقة في كل التأويلات التي نسندها إلى «ك» و«ل» في كل مجالات القول غير الفارغة.

لقد توصّلنا إلى طريقة للبت بالنسبة إلى الصيغ الوجودية الخالصة ذات متغير واحد مطلق. تكون الصيغة صحيحة إذا وفقط إذا كانت مصفوفتها تغدو صحيحة صدقيًا عندما نبدل المتغير المطلق بالمتغيرات الوجودية.

يمكن توسيع هذا الاختبار ليشمل الصيغ الوجودية الخالصة التي

تتضمن أكثر من متغير مطلق. وسيكون في هذه الحالة، بالتأكيد، كثير من طرائق إنابة المتغيرات المطلقة بالمتغيرات الوجودية. بيد أننا نتناول، عندئذ، فصل كل هذه النتائج ونفحص صحتها الصدقية. مثال ذلك:

(4) Vهـ (ك(سـ هـ) ← ك(هـ عـ)).

هناك طريقتان لإنابة المتغيرات المطلقة بالمتغير الوجودي. ونحصل على «ك(سـ سـ) ← ك(سـ عـ)» و«ك(سـ عـ)← ك (عـ عـ)». و تكون العبارة الفصلية:

(5) ك(سـ سـ) ← ك(سـ عـ) .V. ك(سـ عـ) ← ك(عـ عـ)

صحيحة صدقيًا. وكل نصف من (5) يستلزم (4): وبالتالي فكل تأويل يجعل هذا النصف أو ذاك صادقًا يجعل (4) صادقة. باختصار، إن (5) تستلزم (4). وعليه إن (4) صحيحة. إنه أمر غريب ولكنه يصدق، منطقيًا، بالنسبة إلى أي شخصين جون وماري، أن هناك شخصًا، إذا أعجب به جون، فإنه يعجب بماري.

لِنَرَ بشكل عام أن صحة الفصل ليست كافية فقط لصحة السور الوجودي الخالص، بل ضرورية أيضًا. دعونا نستدل مرة أخرى انطلاقًا من مثال. ولنعدِّل (4) فقط بما يكفي لإفسادها.

(4') Vهـ (ك (سـ هـ) ← ك(عـ هـ))

يصير الفصل في العبارة:

(5') ك(سـ سـ) ← ك (عـ سـ) .V. ك(سـ عـ) ← ك(عـ عـ)

قابلة للإبطال بإسناد ص إلى «ك (سـ سـ)» وإلى «ك(سـ عـ)»، وك إلى «ك(عـ سـ)» وإلى «ك(عـ عـ)». غير أن (4') تتلخص في (5') إذا كان المجال يتكون فقط من سـ وعـ وعليه تكون (4') كاذبة في هذا المجال بالنسبة إلى تأويل من هذا القبيل لـ «ك».

في هذه المرحلة يكون شكل البرهان بديهيًا بالنسبة إلى المبرهنة العامة

الموالية: تكون الصيغة الوجودية الخالصة صحيحة إذا وفقط إذا حصلنا على صيغة صدقية صحيحة متى اعتبرنا فصل النتائج الناجمة عن إنابة المتغيرات المطلقة بالمتغيرات الوجودية داخل المصفوفة.

على أمل التحقق من الصحة خلال هذه السطور، فإننا نكون على صواب، عندما نحول صيغة ما إلى صيغة شاملة، في اختيار خطواتنا لإعطاء الأولوية للأسوار الكلية حيثما أمكن ذلك. إذا تمكّنا من وضعها جميعها في المقدمة، يُمكننا حذفها واختبار الصيغة الوجودية الخالصة. فإذا حصل، عند تحويل (1)، أن جعلنا «Vس» التي توجد في آخرها في مقدمتها، فإن هذا الاختبار سيمنعنا.

يجب أن نشير إلى حالتين هامشيتين. ماذا سيحصل لو صارت كل الأسوار، عند التحويل إلى صورة شاملة، كلية، وبالتالي حُذِفت؟ سنختبر بالطبع الصحة الصدقية للصيغة كما هي، حيث لا توجد الأسوار. وماذا لو انتهى بنا الأمر بالأحرى إلى أسوار وجودية لا تتوفر على متغيرات مطلقة؟ يكفي حينها أن نبدل الحرف الاعتباطي «س» بالمتغيرات داخل المصفوفة، ثم نختبر الصحة الصدقية للصيغة ذات المتغير الوحيد المحصل عليه.

مثلًا، صحة العبارة: Vسـ Vعـ (ك(سـ عـ) ← ك(عـ سـ))

التي ترتد إلى صحة العبارة «ك(سـ سـ) ← ك(سـ سـ)». إن المعيار كافٍ لأن الصيغة ذات المتغير الواحد هي تعيين (لتعيين...) للصيغة الوجودية، وبالتالي فهي تستلزمها. كما أنها ضرورية بما أن الصيغة الوجودية ترتد، في مجال القول المكوّن من موضوع واحد «س»، إلى صيغة ذات متغير وحيد.

وأما الصيغة المتعددة الصحيحة، فيمكن، أو لا يُمكن، أن تكون صحيحة صحة واحدية (انظر الفصل 28). إن صحة (1) و(4) مسألة متعددة لا محالة. والشيء نفسه يصدق على:

(6) Vسـ Λعـ ك(سـ عـ) ← Λعـ Vسـ ك(سـ عـ)،

التي تميل إلى أن تكون هي أول مثال للصيغة المتعددة الحقيقية التي نفكر فيها. دعونا نحاول أن نطبق عليها طريقتنا الجديدة. إننا نحصل، عند تحويلها إلى صيغة شاملة بوضع الأسوار الكلية في مقدمتها، على ما يلي:

Λسـ Λعـ Vهـ Vفـ (ك(سـ هـ) ← ك(فـ عـ))

وبالطريقة نفسها نختبر ما يلي:

(7) Vهـ Vفـ (ك(سـ هـ) ← ك(فـ عـ)).

هناك طريقة واحدة لاستبدال المتغيرات المطلقة في العبارة (7) بـ «هـ» و«فـ» في «ك(سـ هـ) ← ك(فـ عـ)» تُنتج «ك(سـ عـ) ← ك(سـ عـ)»: وهناك ثلاث أخرى. سيكمن اختبار صحة (7)، ومن ثم صحة (6)، في تركيب فصل «ك(سـ عـ) ← ك(سـ عـ)» مع مَلاحِقه الثلاثة وفحص صحة النتيجة صدقيًّا. لكن بالطبع لا حاجة لكل هذا، لأن «ك(سـ عـ) ← ك(سـ عـ)» صحيحة في حد ذاتها؛ يجب أن يكون الفصل صحيحًا.

من الملائم في كثير من الأحيان، عند اختبار الصيغ الوجودية الخالصة، أن يظهر أن مثل هذه النتيجة الواحدة الناجمة عن الإنابة صحيحة في حد ذاتها. وهكذا خذ المثال الوارد في الفصل 27 المتعلق برسم الدوائر. إن الشرط الذي ينبغي اختبار صحته هنا هو:

(8) Λسـ (ك(سـ) ← ل(سـ)) ← Λعـ [Vسـ(ك(سـ) . Λم(عـ سـ)) ← Vسـ (ل(سـ) . Λ م(عـ سـ))]

(انظر الفصل 27، (1)). عند تحويله إلى صيغة شاملة مع إعطاء الأولوية للأسوار الكلية ثم حذف الأسوار الكلية الأولية، نحصل على الصيغة الوجودية الخالصة:

(9) Vهـ Vفـ (ك(هـ) ← ل(هـ) .←: ك(هـ) . Λم(عـ، سـ) .←. ل(فـ) .Λ م(عـ، فـ)).

توجد الآن أربع طرق لإنابة «سـ» و/أو «عـ» بـ «هـ» و«فـ» في مصفوفة (9). طريقة واحدة تنتج:

(10) ك(س) ← ل(س) .←: ك(س) . ∧م(ع، س) .←. ل(س) .∧ م(ع، ف))،

وتبقى ثلاث طرق أخرى. يقتضي اختبار صحة (9) وبالتالي (8)، تركيب العبارة الفصلية لـ (10) مع الثلاث الأخرى، ثم فحص صحة النتيجة الطويلة صدقيًا. لكن مرة أخرى، من الأفضل أن ننظر قبل القفز: إن (10) نفسها صحيحة صدقيًا، لذا بالطبع سيكون الفصل كذلك.

سيختبر القارئ التجربة نفسها مرة أخرى إذا تناول المثال الثاني في الفصل 27، المثال المتعلق باللوحات: مرة أخرى، يتبين أن نتيجة إنابة واحدة تكون صحيحة. ومع ذلك يتعين علينا، في بعض الأحيان، الضغط على فصل نتيجتين أو أكثر من نتائج الإنابة. كان هذا صحيحًا بالفعل في المثال البسيط (4): لا واحد من نصفي (5) صحيح في حد ذاته.

وبهذا حصلنا على طريقة للبت في صحة الصيغ الوجودية الخالصة. يُمكن أن نكون واثقين، لكوننا قد أنذرنا بعدم وجود أية طريقة عامة للبت في صحة الصيغ المسورة، من أن تحريك الأسوار الكلية إلى صدر العبارة لا يتحقق دائمًا. إليكم صيغة صحيحة بسيطة تستعصي على هذه الطريقة:

(11) Vع∧هـ(ك(س، هـ) ← ك(ع، هـ))

ولكي نثبت أن صيغًا من هذا القبيل صحيحة ينبغي أن نلجأ إلى طرق أكثر عمومًا.

غير أنه من الكياسة أن نبدأ، عندما نحاول إثبات صحة صيغة ما، بصيغة وجودية خالصة. وهو ما ينجح في الغالب، فإذا نجح تعقبه ميزتان: أولاهما توفر اختبارًا مباشرًا يضمن، بكيفية جازمة، جوابًا سلبيًا أو برهانًا؛ وثانيتهما تكمُن في كون العملية تميل إلى أن تكون سريعة نسبيًا لأنه غالبا ما يحصل، كما هو حال جميع الأمثلة الثلاثة التي فحصناها من الفصل 27، أن الإنابة الفردية للمتغيرات الكلية بالمتغيرات الوجودية تحسم الأمور.

هكذا تكون لدينا منذ الآن، بشكل عرضي، طريقة عامة أخرى للبت في

صحة الصيغ الواحدية بديلة لطرائق الباب الثاني. لأننا رأينا في الفصل 24 كيف يُمكن تخليص صيغة واحدية؛ ورأينا أيضًا أنه بمجرد ما تُخلَّص، لن تحوز بعد ذلك أسوارًا متراكبة. غير أن قواعد تحرك الأسوار تمكننا من تحويل الأسوار في الوضع الصدري إلى أي ترتيب نريده إذا لم يكن أي واحد منها متراكبًا. هكذا يُمكن اختبار صحة كل صيغة واحدية بواسطة طريقة الصيغ الوجودية الخالصة.

لكي نفتح الطريق لأمثلة جديدة تتضمن صيغًا متعددة، لنستأنس بالتناظر والتعدي والانعكاس، والمفاهيم المرتبطة بها- تلك المفاهيم التي تستحق اعتبارها، هي الأخرى، في حد ذاتها. يكون الحد الاثناني تناظريًّا، أو لاتناظريًّا، أو متعدِّيًا أو غيرَ متعدٍ، أو انعكاسيًّا كليًّا، أو انعكاسيًّا أو لاانعكاسيًّا إذا كان يستوفي ما يلي:

Λسـ Λعـ (ك(سـ، ع) ← ك(ع، سـ)) (التناظر)

Λسـ Λعـ (ك(سـ، ع) ← ¬ك(ع، سـ)) (اللاتناظر)

Λسـ ΛعـΛهـ (ك(سـ، ع) . Λك(ع، هـ). ←. ك(سـ، هـ)) (التعدي)

Λسـ ΛعـΛهـ (ك(سـ، ع) . Λك(ع، هـ). ←. ¬ك(سـ، هـ)) (اللاتعدي)

Λسـ ك(سـ، سـ) (الانعكاس الكلي)

Λسـ Λعـ (ك(سـ، ع) ←. ك(سـ، سـ) . Λ ك(ع، ع)) (الانعكاس)

Λسـ ¬ك(سـ، سـ) (اللاانعكاس)

يعتبر الحد الإثناني «مواطن» تناظريًّا بحيث إذا كان سـ مواطنًا لـ ع، فإن ع مواطن لـ سـ وهو أيضًا متعدٍ، إذا لم نسمح بتعدد الجنسية؛ لأنه إذا كان سـ مواطنًا لـ ع، وكان ع مواطنًا لـ هـ، فإن سـ مواطن لـ هـ. وهو انعكاسي أيضًا، إن اعتبرنا أن شخصًا ما مواطن لنفسه، كما ينبغي لنا حقًّا أن نقول متى كان الحد «مواطنًا لـ» يعني «له الجنسية نفسها مثل». ولكنه ليس انعكاسيًّا كليًّا، متى افترضنا أن مجال قولنا يتضمن ذواتا بلا جنسية. إن الأمثلة الدالة على

الانعكاس الكلي نادرة ومبتذلة: نجد من بينها «مماثل لـ» و«متواجد مع».

وأما الحد الاثناني «شمال» فمُتعدّ أيضًا، لكنه لامتناظر ولاانعكاسي: «سـ شمال عـ» تستبعد «عـ شمال سـ»، ولا شيء يوجد شمال نفسه. في حين أن الحد الاثناني «أم» لامتعدٍّ ولامتناظر ولاانعكاسي.

وأما الحد الاثناني «يحب» فلا يتوفر على أية خاصية من الخاصيات السبع؛ فإذا كان سـ يحب عـ، فإن عـ قد يحب وقد لا يحب سـ، وهكذا فإن «يحب» ليست تناظرية أو لاتناظرية. فإذا كان سـ يحب عـ، وكان عـ يحب هـ، فإن سـ قد يحب وقد لا يجب هـ، وبالتالي ففعل «يحب» ليس متعديًا أو لامتعديًا. وبما أن بعض الأشخاص يحبون أنفسهم في حين أن آخرين (حتى من بين أولئك الذين يُحِبون ويُحَبون) لا يحبُّون أنفسهم، فإن «يحب» ليس انعكاسيًّا أو لاانعكاسيًّا.

قد يتساءل القارئ لِمَ، بموازاة مع التمييز بين الانعكاس والانعكاس الكلي، لا يوجد تمييز بين اللاانعكاس بالمعنى الذي في:

Λسـ Λعـ (ك(سـ، عـ) ←. ¬ك(سـ، سـ) . Λ ¬ك(عـ، عـ))

واللاانعكاس الكلي بمعنى «Λسـ ¬ك(سـ، سـ)»؟ يكمُن السبب في أن هذا التمييز مخادع، بما أن الصيغتين متكافِئتان. ولنبين ذلك، نثبت صحة عبارتين شرطيتين، كما يلي:

(12) Λسـ Λعـ (ك(سـ، عـ) ←. ¬ك(سـ، سـ) . Λ ¬ك(عـ، عـ))← Λسـ ¬ك(سـ، سـ).

(13) Λسـ ¬ك(سـ، سـ) ← Λسـ Λعـ ((ك(سـ، عـ) ←. ¬ك(سـ، سـ) . Λ ¬ك(عـ، عـ)).

وبتحويلها إلى صيغة شاملة مع حذف الأسوار الكلية الأولية، نحصل على:

(14) Vسـ Vعـ (ك(سـ، عـ) ←. ¬ك(سـ، سـ) . Λ ¬ك(عـ، عـ)) :← ¬ك(هـ، هـ)،

(15) Vهـ (¬ك(هـ، هـ)←: ك(سـ، ع) ←. ¬ك(سـ، سـ) . ٨ ¬ك(ع، ع)).

تتبين صحة الصيغة الأولى من خلال الصحة الصدقية لنتيجة الإنابة الآتية:

ك(هـ، هـ) ←. ¬ك(هـ، هـ) . ٨ ¬ك(هـ، هـ) :← ¬ك(هـ، هـ)

وتتبين صحة الصيغة الثانية من خلال الصحة الصدقية للعبارة الفصلية الموالية التي تشكلت بإجراء فصل بينهما:

¬ك(سـ، سـ)←: ك(سـ، ع) ←. ¬ك(سـ، سـ) .٨ ¬ك(ع، ع)

.:V:. ¬ك(ع، ع) ←: ك(سـ، ع) ←. ¬ك(سـ، سـ) .٨ ¬ك(ع، ع).

لنضرب مثالًا جديدًا، لنبرهن على أن التناظر والتعدي معًا يستلزمان الانعكاس. وهكذا يعني إثبات صحة الشرط:

(16) ٨سـ٨ع (ك(سـ، ع) ← ك(ع، سـ)) . ٨ ٨سـ٨ع٨هـ (ك(سـ، ع) . ٨ ك(ع، هـ) . ← ك(سـ، هـ)) .← ٨سـ٨ع (ك(سـ، ع) ←. ك(سـ، سـ) . ٨ ك(ع، ع)).

ونحصل، بعد تحويلها إلى صيغة شاملة، وبعد حذف الأسوار الكلية الأصلية، على ما يلي:

(17) VغVفVسـVعVهـ (ك(غ، ف) ← ك(ف، غ) : ٨ ك(سـ، ع). ٨ ك(ع، هـ) .← ك(سـ، هـ) : ←: ك(ط، ظ) ←. ك(ط، ط) . ٨ ك(ظ، ظ)).

تتم البرهنة على صحة هذه الصيغة بواسطة الصحة الصدقية للعبارة الفصلية المكوّنة من نتائج إنابة «ط» و«ظ» بالمتغيرات الوجودية:

(18) ك(ط، ظ) ← ك(ظ، ط) : ٨ ك(ط، ظ) . ٨ك(ظ، ط). ← ك(ط، ط) :←: ك(ط، ظ) ←. ك(ط، ط). ٨ ك(ظ، ظ) .:V:. ك(ط، ظ) ← ك(ظ، ط) : ٨ ك(ظ، ط) . ٨ ك(ط، ظ) .← ك(ظ، ظ) : ←: ك(ط، ظ) ←. ك(ط، ط) . ٨ ك(ظ، ظ).

والقارئ مدعو للقيام بهذا التحليل الصدقي المتعب قبل أن يتوصل إلى الصحة الصدقية لهذه العبارة الفصلية.

لمحة تاريخية: يبدو أن وجود اختبار للصحة لهذا الغرض قد أشار إليه، في المرة الأولى، كل من بيرنايس وشونفيكل (Schönfinkel) 1928. ونجد، في هذه الطريقة، أصداء لهربراند (Herbrand)، والتي ستبدو بوضوح في الفصل 36.

تمارين

1. حدد جميع خطوات الانتقال واستبدال الحروف وحذفها التي تقود من (1) إلى (2)، ومن (6) إلى (7)، ومن (8) إلى (9)؛ ومن (12) إلى (14)، ومن (13) إلى (15) ومن (16) إلى (17).
2. تحقّق من صحة (18).
3. عالج المثال الوارد في الفصل 27 الخاص باللوحات الفنية.
4. طبق الطريقة الجديدة على تمارين الفصل 25.
5. برهن أن اللاتناظر يستلزم اللاانعكاس.
6. برهن أن اللاتعدي يستلزم اللاانعكاس.
7. برهن أن التعدي واللاانعكاس يستلزمان معًا اللاتناظر.

30 الطريقة الأساسية

سنتناول، الآن، طريقة في البرهنة يبدو أنها تامة، أي صالحة لإثبات صحة كل صيغة مسوّرة صحيحة ومن ثم إثبات كل لزوم وكل عدم اتساق. وسنوجهها بالفعل نحو براهين عدم الاتساق. ولنثبت أن صورة ما صحيحة، نبرهن أن نفيها غير متسق. ولنثبت صحة اللزوم، يكفي أن نثبت أن الصيغة الأولى غير متسقة مع نفي الأخرى.

لقد رأينا في (11) من الفصل السابق أننا إزاء مثال يقتضي منا البتّ في صحته لكنه يمتنع عن طريقة الصيغ الوجودية الخالصة؛ ولكي نثبت صحته بواسطة الطريقة الجديدة، نقوم بنفيه، ونعتبر الصيغة الشاملة للنفي مقدمة، ثم ننتج تعيينات لهذه الأخيرة كما يلي:

مقدمة: Λع Vهـ ¬(ك(س، هـ) ← ك(ع، هـ)) .

تعيينات: Vهـ ¬(ك(س، هـ) ← ك(س، هـ))،

¬(ك(س، غ) ← ك(س، غ)).

تنتهي البراهين على عدم الاتساق في هذا النسق دائمًا بصورة صدقية غير متسقة، كما هو الحال هنا، أو بتركيب صدقي غير متسق للصيغ؛ ولهذا المخرج الكئيب هدف يكمُن في تبيان كذب المقدمة، وبالتالي عدم اتساقها. ويكون كل سطر تالٍ تعيينًا للسطر السابق.

يبدو أننا سنصادف هنا، الطريقة التقليدية المعروفة باسم برهان الخلف (reductio ad absurdum)، أي الإبطال بواسطة اشتقاق التناقض الظاهر. ولكن كيف يتم الاشتقاق؟ وهل تستلزم العبارات المسوَّرة تعييناتها؟

لا شك أنه يحصل بالنسبة إلى العبارت المسوَّرة كليًا. فالسطر الأول من الاستدلال أعلاه يستلزم السطر الثاني. إن عملية التعيين الكلي-ت.ك، كما سأرمز إليها- التي تقود من السطر الأول إلى السطر الثاني له قوة لزومية.

غير أن التعيين الوجودي ت.و، الذي يقود من السطر الثاني إلى السطر الأخير ليس له قوة لزومية. فـ «Vسـ ك(سـ)» لا تستلزم «ك(ع)». ونتيجة لذلك، أليس من البديهي أن اشتقاق عدم الاتساق بواسطة تعيين متدرج، كما هو الأمر في البرهان السابق، يكفي لإثبات عدم اتساق المقدمة: الواقع أنه يكفي ، لكن يلزم أن نبرهن على ذلك.

قبل أن نعلل الطريقة لنكوّن عنها فكرة رصينة. يجب في البداية أن نحصر ت.و كما يلي: يجب أن يكون متغير التعيين، ذاك الذي نبدله بالمتغير الذي كان مقيدًا بالسور الوجودي المحذوف، جديدًا. وبتعبير أدق: لا ينبغي أن يكون مطلقًا في أي سطر من الأسطر السابقة عن هذا التعيين. وعليه، انظر كيف سيكون من المؤسف الاستدلال الآتي:

<u>مقدمتان:</u>

Vسـ ك(سـ)

Vسـ ¬ك(سـ)

<u>تعيينان:</u>

ك(ع)

¬ك(ع) (خاطئ)

وفي مرحلة ثانية بإمكاننا أن نحصل -غير أن الأمر يتعلق هذه المرة بحرية أكثر مما يتعلق بالتقييد- على أكثر من مقدمة على نحو ما سلف. لنتناول مجددًا على سبيل المثال اللزوم المعتاد الذي برهنّا عليه في الفصل السابق عبر إثبات صحة (6). وحتى نتمكن من البرهنة عليه بواسطة الطريقة الحالية، يجب أن نسلم بالمقدمتين «Vسـ Λع ك(سـ ع)» وكذا بالصيغة

الشاملة لنفي «∧عـ ∨سـ ك(سـ عـ)». ثم ننتقل بواسطة التعيين إلى عدم الاتساق الصدقي:

<u>مقدمتان:</u>

∨سـ ∧عـ ك(سـ عـ)

∨عـ ∧سـ ⌐ك(سـ عـ)

<u>تعيينات:</u>

∧عـ ك(هـ عـ)

∧سـ ⌐ك(سـ فـ)

ك(هـ فـ)

⌐ك(هـ فـ)

كمثال بسيط آخر، دعونا نبرهن أن «∧سـ ∧عـ ك(سـ عـ)» تستلزم «∧عـ ك(عـ عـ)».

<u>مقدمات:</u>

∧سـ ∧عـ ك(سـ عـ)

∨عـ ⌐ك(عـ عـ)

<u>تعيينات:</u>

⌐ك(هـ هـ)

∧عـ ك(هـ عـ)

ك(هـ هـ)

إن النقطة المثيرة للاهتمام بخصوص هذا اللزوم هي أن المرء يستطيع القول إنه بديهي من خلال التعيين المباشر، أن «∧عـ ك(عـ عـ)» مجرد تعيين لـ «∧سـ ∧عـ ك(سـ عـ)». قد يكون المرء على خطأ، ويُمكن للمرء أن يجادل أيضًا بأن «∧سـ ∨عـ ك(سـ عـ)» تستلزم «∨عـ ك(عـ عـ)»، في حين أنّها لا تستلزمها. انظر (6) من الفصل 28. إن «∧عـ ك(عـ عـ)» و«∨عـ ك(عـ

ع)» ليستا تعيينين لـ «Λسـ Λعـ ك(سـ، ع)» و«Λسـ Vعـ ك(سـ، ع)». يحتاج تعريف التعيين في نهاية الفصل 28 إلى أن تتم مراعاته بعناية وأن تحظى الأسباب الكامنة وراءه -أي القيود المفروضة على الإنابة- بالتقدير الكامل.

إليكم مثال آخر أكثر غنًى، الذي سيكون بمثابة مصدر للتوضيح عندما نبلغ مرحلة تعليل هذه الطريقة.

<u>مقدمات:</u>

(1) Vغـ Λعـ ك(غـ، ع)،

(2) Λسـ Vظ Λعـ –(ك(ظ، ع) . Λ ك(عـ، سـ))

(3) Λسـ Λعـ Vفـ (ك(سـ، ع) ←: –ك(سـ، فـ) . Λ ك(فـ، ع) .V. ك(عـ، فـ) . Λ . ك(فـ، سـ))

<u>تعيينات:</u>

(4) Λعـ ك (هـ، ع)	[تعيين لـ (1)]
(5) Vغـ Λعـ –(ك(غـ، ع) . Λ ك(عـ، هـ))	[تع لـ (2)]
(6) Λعـ –(ك (طـ، ع) . Λ ك(عـ، هـ))	[تع لـ (5)]
(7) ك(هـ، ط)	[تع لـ (4)]
(8) Λ عـ Vفـ (ك(هـ، ع) ←: –ك(هـ، فـ) . Λ ك(فـ، ع) .V. ك(عـ، فـ) . Λ . ك(فـ، هـ))	[تع لـ (3)]
(9) Vفـ (ك(هـ، ط) ←: –ك(هـ، فـ). Λ ك(فـ، ط) .V. ك(ط، فـ) .Λ. ك(فـ، هـ))	[تع لـ (8)]
(10) ك(هـ، ط) ←: –ك(هـ، ضـ) . Λ ك(ضـ، ط) .V. ك(ط، ضـ) .Λ. ك(ضـ، هـ))	[تع لـ (9)]
(11) ك(هـ، ضـ)	[تع لـ (4)]
(12) – (ك(ط، ضـ) . Λ ك(ضـ، هـ))	[تع لـ (6)]

يبين التحليل الصدقي أن (7) و(10) و(11) و(12) معًا غير متسقة. فنستنتج إذًا، أن (1)-(3) معًا غير متسقة.

سنسمي عملية البرهنة على عدم الاتساق التي وصفنا توًا الطريقة الأساسية، وذلك لنميزها عن الطرائق البديلة التي أوردناها في الفصول 29 و35-38. ونختصرها في الأمرين الطفيفين الآتيين: التعيين: تطبيق ت.ك وت.و، والاختيار الدائم لمتغيرات تعيين جديدة لـ ت.و. الانتهاء: إلى تجمع من التعيينات غير المسوَّرة غير متسق صدقيًا.

يجب أن أبين أيضًا أن الطريقة صحيحة، أي إنها تنتج عدم الاتساق الصدقي فقط عندما تكون المقدمات غير متسقة. ولهذه الغاية، سأحتاج إلى مصطلحات خاصة. سأستعمل «المولِّد» باعتباره ملازمًا لـ «تعيين»: هكذا تشتق خطوة تطبيق ت.ك أو ت.و، مثلًا، تعيينا من سطره المولِّد. سأتحدث عن تعيينات-ك وعن تعيينات-و. وهكذا في البرهنة على عدم اتساق (1)-(12) تكون التعيينات-و هي (4) و(6) و(10)، وأما أسطرها المولِّدة فهي (1) و(5) و(9). وسأقصد بالشرط- ت.و الشرط الذي ينتج مقدمه وتاليه تعيينًا-و وسطره المولِّد. وإذا ما عيّنت، بغية الاختصار، كل سطر فقط برقمه، فإن الشرطيات ت.وللبرهان على عدم اتساق (1) -(12) ستكون هي: «1← 4»، و«5 ← 6»، و«9 ← 10».

لنلاحظ الآن أن كل تعيين، في برهنة من هذا القبيل يلزم عن الأسطر السابقة بالإضافة إلى شرطيات-ت.و. فكل تعيين-ك، في الواقع، يلزم عن سطره المولِّد، وكل تعيين-و يلزم صدقيًا عن سطره المولِّد وعن شرطه-ت.و. (مثال ذلك، تلزم (4) عن (1) و«1 ← 4»). وكل التعيينات توجد، في آخر المطاف، مُستلزَمة، إذًا، عن المقدمات والشرطيات-ت.و، وبما أنها غير متسقة، فإن وصل المقدمات والشرطيات-ت.و سيكون بدوره غير متسق. وسيكون هذا الوصل، بالنسبة إلى مثالنا، على هذا النحو:

1 .∧ 2 .∧ 3 .∧ 1 ← 4 . ∧ 5 ← 6 . ∧ 9 ← 10.

وكما أشرنا إلى ذلك في بداية الفصل 25، سيظل عدم الاتساق قائمًا إذا وضعنا سورًا وجوديًا أمام الوصل. وليكن سورًا يتضمن متغيرتعيين الأخيرو.

V ضـ(1 .∧ 2 .∧ 3 .∧ 1 ← 4 . ∧ 5 ← 6 . ∧ 9 ← 10).

ولنوظف الآن ما ينجم عن كون هذا المتغير التعييني باعتباره جديدًا (أي باعتباره ليس مطلقًا في أي سطر سابق)، غيرمطلق في أي مكان من العبارة الوصلية ما عدا في الشرط-ت.و الأخير، بل في تاليه فقط. ويصبح بإمكاننا، إذًا، أن نضم السور إلى هذا التالي بموجب قواعد تحرك الأسوار (1) و(5) من الفصل 23:

1 .∧ 2 .∧ 3 .∧ 1 ← 4 . ∧ 5 ← 6 . ∧ 9 ← V ضـ10.

غير أن (9) و«Vضـ 10» متماثلان ما عدا في ما يخص الاختيار الأبجدي للمتغير الوجودي. وينتج عن ذلك أن «9 ← Vضـ10» صحيحة ويمكن أن نحذفها من العبارة الوصلية، فنترك «1 .∧ 2 .∧ 3 .∧ 1 ← 4 . ∧ 5 ← 6». يسمح لنا استدلال مماثل بعد ذلك بأن نحذف «5 ← 6» ثم، أخيرًا، «1 ← 4». هكذا رُدّت العبارة الوصلية برمتها إلى المقدمات التي تكون نتيجة ذلك غيرالمتسقة، وهذا ما وجب إثباته. لقد اعتمدت كثيرًا، في هذا التدليل، على مثال خاص، غيرأن الاستدلال العام لا يقل عنه وضوحًا.

نلاحظ، إذًا، أن طريقتنا الأساسية طريقة سليمة، إنها بالأحرى، طبيعية رغم الصرامة التي اقتضاها التدليل السابق. يُمكن وصف الطريقة العامة (1)-(12) بكونها إبطال لوصل معين لعبارات حقيقية وضعت مكان (1)-(3)، على طول السطر الموالي. يوجد، حسب (1)، على الأقل شيء ما هو ك بالنسبة إلى كل شيء، ولنسمِ هذا الشيء على الأرجح هـ لدينا إذًا (4). غير أن (2) تقول إن كل شيء سـ هو بحيث.... جيد، ولتكن هـ على الخصوص بهذه الكيفية: وهكذا تكون لدينا (5): هناك شيء ما بحيث.... ولنسمّ هذا

الشيء ط ولنواصل بالطريقة نفسها، لنصل أخيرًا إلى المتناقضات (7) و(10)-(12). وهكذا تُبطَل المقدمتان (1) و(3). يُمكن لواحدة أو اثنتين منها أن تكون صادقة، لكن يتعذر أن تصدق كلها.

يجب أن تُعدّ المقدمات من ناحيتين قبل أن تطبق عليها الطريقة الأساسية. ويجب أن تُحوّل إلى صيغ شاملة؛ وهذا ما نعلمه. أما النقطة الثانية فتتمثل في أنه يجب أن يتم اختيار الحروف المستعملة كمتغيرات مقيَّدة في كل مقدمة بحيث لا تطابق متغيرًا مطلقًا لهذه المقدمة أو تلك. لنأخذ المثال التالي: «Vف ¬ك(ع، ف)» و«Λس Λع ك(س، ع)». إن الصورتين معًا غير متسقتين، بيد أن القارئ سيحاول عبثًا أن يثبت عدم اتساقهما بواسطة الطريقة الأساسية، في حين أن البرهنة ستتم من دون صعوبة لو استبدلت «هـ» المقيَّدة بـ «ع».

<u>مقدمتان:</u>

Vف ¬ك(ع، ف)،

Λس Λهـ ك(س، هـ).

<u>تعيينات:</u>

¬ك(ع، غ)

Λهـ ك(ع، هـ)،

ك(ع، غ)

سنرى، في الفصل 32 أن الطريقة الأساسية تامة رغم بساطتها. وسنرى أن كل عبارة وصلية تتكون من صيغ غير متسقة، وأُعِدّت من ناحيتين كما أشرنا إلى ذلك قبل قليل، تزوّدنا بدليل على عدم الاتساق.

لمحة تاريخية: لقد كان البرهان بالخلف، الذي نسميه أيضًا البرهان غير المباشر، معروفًا لدى القدماء تحت اسم أباغوجي (apagoge). ويكمن

امتيازه على الاستدلالات المباشرة على الصحة فقط في نقطة بسيطة عبارة عن اتفاق تقني سنشير إليه في الفصل 36. كانت أول عملية استدلال غير مباشر بالنسبة إلى نظرية التسوير -تلك التي قام بها فريغه -1879 تتم على منوال أكسيومي (تسليمي) الوارد في الفصل 13؛ انظر لاحقًا الفصل 37. وظل هذا الأسلوب هو المفضل في الثلاثينيات من القرن العشرين. ومع ذلك، مع حلول سنة 1928 و1930 قدم سكوليم وهيربراند طرائق للبرهنة قريبة مما أسميه الطريقة الأساسية. انظر الفصلين 35 و36. لقد ظهرت الطريقة الأساسية في الهامش، سنة 1955، في الطبعات السابقة على هذا الكتاب.

تمارين

1. ابحث عن الأخطاء في الاستدلالات على عدم الاتساق التالية:

<u>مقدمات:</u>

Vسـ ك(سـ صـ)،　　¬ Vسـ ك(سـ سـ)،　　Vسـ ك(سـ صـ)،

Λسـ ¬ك(سـ سـ)،　　Λصـ ك(صـ صـ)،　　V سـ ¬ك(سـ صـ)

<u>تعيينات:</u>

ك(صـ صـ)　　¬ك(هـ هـ)　　ك(هـ صـ)

¬ك(صـ صـ)　　ك(هـ هـ)　　¬ك(هـ صـ)

هل تجد أن بعض هذه الأزواج من المقدمات غير متسقة حقا؟ أيُّها؟ برهِن على ذلك.

2. طبق الطريقة الأساسية على التمارين 3-7 من الفصل 29.
3. صف العائق الذي تصادفه الطريقة الأساسية خلال إثبات عدم اتساق العبارة «Vفـ ¬ك(عـ فـ)» والعبارة «Λسـ Λعـ ك(سـ عـ)» مكتوبتين بهذه الكيفية.

31 تطبيقات

كلما تعلقت طريقتنا في البرهنة بأقوال مصوغة باللغة الطبيعية، يكون التشارح المناسب لهذه العبارات وضبط بنيتها الحقيقية بالقدر نفسه من الأهمية التي يحوزها الاستدلال الذي تفتح له هذه المهمة الأولية الطريق (انظر. الفصل8).

لقد أشرنا، في الفصل 14، إلى عدد لا يستهان به من الطرائق التي تظهر عليها الصيغ الحملية ك.م وك.س وج.م وج.س في اللغة الطبيعية؛ ورأينا في الفصل 22 كيف نُعبّر عن هذه الصيغ بواسطة رموز الأسوار. تُزوّدنا هذه الملاحظات بمرشد لترجمة الكلمات إلى رموز الأسوار. بيد أننا رأينا أيضًا، انطلاقًا من مثال: «امرأة حاضرة»، و«القبطان محترم» و«جون لا يستطيع أن يهزم أي عضو من الفريق»، و«طاي يأكل دائمًا بالعصي الخشبية» (الفصل 14)، أن اعتماد لائحة جاهزة من العبارات اللغوية أمر خاطئ. إن الطريقة الأضمن للتعبير عن الكلمات بالرموز هي العملية الأكثر صعوبة: أي إعادة التفكير في العبارة من الداخل وفي سياقها. ومتى وجدت طرق لتنقيح العبارات المنطقية الغامضة عبر إعادة صياغتها، فمن الأفضل استعمالها قبل اللجوء إلى الرموز المنطقية.

ويكون الانفصال الجذري عن اللغة الطبيعية ضروريًا في ما يخص الأزمنة. يستحسن تبني تصور مينكوفسكي (Minkowski) الذي يجعل من الزمن البعد الرابع على قدم مساواة مع الأبعاد الثلاثة للمكان. يجب أن نقرأ الأسوار قراءة لازمنية. وأما قيم «س»، فيمكن أن تكون وقائع موضوعية، أو

أبعاد رباعية للزمكان، وبإمكاننا أن نسنِد إلىها تواريخ ومُدَدًا وكذا مواقع، وأطوال وعرض أيضًا. أما السور ذاته فلا يسند أيًا من هذه الأشياء. «V س» لا يقول «كان هناك» و«سيكون هناك»: بل يقول فقط، وبمعنى خارج الزمن، «يوجد».

كان التصور الرباعي الأبعاد ضروريًا، كما يعلم الكل، ليعطي معنى الفيزياء النسبية لآينشتاين. غير أنه ساهم، بشكل كبير، في توضيح الخطاب العادي في مواضيع جد مملة. عندما نذكر عدد الرؤساء والبابوات الذين وجدوا، فإننا نحدد كبرَ فئة من العناصر لم تتواجد مطلقا كلها: وعندما نقارن نابليون بالقيصر، أو عندما نتعقَّب نسب داود منذ إبراهيم، فإننا نربط بين شخصين لم يتواجدا قطّ مع بعضهما. إنَّ كثيرًا من الألغاز المفهومية أو اللغوية ستختزل متى اعتبرنا الترابطات المكانية والزمانية كما لو كان لها الطبيعة نفسها من الناحية المنطقية. فكما أن بوسطن وبيرمنغهام تفصل بينهما مسافة 3000 ميل، فكذلك تفصل بين القيصر ونابليون 1800 سنة: والأحسن أن نقرأ الفعل « تفصل» قراءة لا زمانية.

هناك عادة راسخة في الأذهان تحمينا من المغالطة التبسيطية من الصنف الآتي: تزوج جورج الخامس بالملكة ماري، وبما أن الملكة ماري أرملة، فإن جورج الخامس قد تزوج أرملة. فمن الواضح، على الأقل، أن المنطق المخصص لضبط هذا الصنف من الأشياء بوضوح سيكون ضربًا من التعقيد الذي لا طائل من ورائه. من الأفضل لنا أن نكتفي بآلة منطقية أبسط، ونجري، عندما نرغب في تطبيقها، تشارحًا للعبارات بحيث نُكيّفها معها. وقد سبق لنا في الفصل 14 أن حصلنا على لمحة لمختلف الطرائق التي كان على الإحالات الزمنية فيها أن تتكيف مع هذا التشارح. بطبيعة الحال، لأنَّ الحضور العام للأفعال في اللغة العربية يلزمنا ليس بالحالة الظاهرة على الزمن في كل التشارحات. ففي نصف الحالات تكون المؤشرات الزمنية

نافلة ويفرضها الاستعمال فقط، بل وغالبًا ما نستطيع، في المجال العملي، الاستغناء عن أفعال الزمن بلا تخوف، على الأقل ما دام لا يظهر أي خطر لخاصية الاشتراك أثناء عملية الاستدلال (انظر الفصل 8).

يفرض المشكل نفسه في كل وقت وحين عندما نجري التشارح، عند ترجمة العبارات الأكثر تعقيدًا إلى صيغ مسوّرة، ويتمثل هذا المشكل في تحديد التراكيب المقصودة. وتظل المؤشرات المُجمّعة لهذا الغرض على المستوى الصدقي في الفصل 4 مفيدة، غير أن الإشارة الخاصة الأكثر أهمية يظهر أنها هي تلك التي أشرنا إليها بصدد (11) من الفصل 22: **يجب أن يمتدَّ مدى السور إلى الأبعد بالقدر الكافي لكي يقيِّد كل مواقع المتغير الذي يفترض أنه يحيل على هذا السور.**

إن تقنية التشارح نحو الداخل (الفصل 8) -كوسيلة لتجزيء مسألة التأويل إلى أجزاء مرنة، ولضبط تعقيدات التركيب- مهمة هنا بالقدر نفسه التي لها في المستويات الصدقية؛ بل أكثر أهمية، إن صح القول، تكون بحسب تنامي تعقد العبارات المعنية. وفضلًا عن ذلك، بعد كل مرحلة من التشارح، من الجيد أن نتحقق من الكل بالنسبة إلى العبارة الأصلية بحيث نتيقن من كون الفكرة المقصودة تظل حاضرة على الدوام.

وباعتبارها عملية جدِّية للتشارح، لنحاول ترجمة المقدمات والنتائج الآتية إلى صيغة مسوّرة، فنضع بذلك قواعد الاستنباط:

<u>المقدمات:</u>

كان الحارس يراقب كل أولئك الذين يدخلون العمارة ما عدا أولئك الذين يرافقونهم أعضاء الشركة.

بعض رجالات فيوريتشيو دخلوا العمارة دون أن يكونوا مرفوقين بأيِّ أحد.

لا يراقب الحارس أي رجل من رجالات فيوريتشيو.

النتيجة:

بعض رجالات فيوريتشيو أعضاء في الشركة.

تقول المقدمة الأولى بالتحديد:

كل شخص يدخل العمارة وليس مُراقَبًا من قبل الحارس كان مرفوقًا بعضو أو أعضاء من الشركة.

عندما نبدأ تشارح هذه المقدمة نحو الداخل، نفحص أولًا بنيتها الخارجية، والتي تكون كما يلي: «Λسـ (... ← ...)»:

Λسـ (سـ شخص دخل العمارة ولم يراقب من قبل الحارس ← سـ كان مرفوقًا بأعضاء من الشركة).

تكمن فائدة مثل هذا التشارح نحو الداخل في كون المقاطع الداخلية التي لم تتشارح يُمكن أن تُعالَج، كلّ واحدةٍ على حدة، كمسألةٍ صغيرة مستقلة. فمثلًا، المكوِّن «سـ كان مرفوقًا ببعض الأعضاء من الشركة»، يصير إذا أخذ في استقلال عن السياق:

Vعـ (سـ كان مرفوقًا بـ عـ .Λ عـ كان عضوًا في الشركة).

وتتطلب الجملة الأخرى «سـ شخص يدخل العمارة ولم يكن مراقَبًا من قبل الحارس»، قدرًا من الانتباه. ومع ذلك، يكفي أن نجعل منها عبارة وصلية ظاهرة:

سـ شخص يدخل العمارة .Λ سـ لم يكن مراقَبًا من قبل الحارس.

بحيث تصبح العبارة برمتها هي:

Λسـ[سـ شخص يدخل العمارة . Λسـ لم يكن مراقَبًا من قبل الحارس .← Vعـ (سـ كان مرفوقًا بـ عـ . Λ عـ كان عضوًا في الشركة)].

ينبغي أن نحرص، كما فعلنا هنا، على إدخال النقط أو الأقواس لإبراز التركيب المقصود.

وأخيرًا، بكتابتنا «ك(س)» بالنسبة إلى «سـ شخص يدخل العمارة»

و«ل(سـ)» بالنسبة إلى «سـ كان مراقَبًا من قبل الحارس». و«م(سـ عـ) بالنسبة إلى «سـ كان مرفوقًا بـ عـ». و«ن(عـ)» بالنسبة إلى «عـ كان عضوًا في الشركة». نحصل على:

∧سـ [ك(سـ) . ∧ ¬ل(سـ) .← ∨عـ (م(سـ عـ) .∧ ن(عـ))].

باعتبارها الصيغة المنطقية للمقدمة الأولى.

فبدلا من أن نحتفظ بكلمة «شخص» ظاهرة طوال التحليل السابق، كان علينا أن نحصر -باعتبارها طريقة بديلة- مجالَ القول في الأشخاص. لا نجد في هذا المثال، مع ذلك، أي فرق كان سينتج عن ذلك بالنسبة إلى الصيغة الرمزية النهائية، لأن «سـ شخص يدخل العمارة» قد انصهرت في «ك(سـ)».

يعود السبب الذي يدعونا إلى تمثيل جملة طويلة إلى حد ما بـ «ك(سـ)»، من دون أن نذهب بعيدًا في التحليل، إلى أننا نعلم عدم جدوى تحليل من هذا القبيل بالنسبة إلى الاستنباط المُقتَرَح. ونحن مطمئنون لكون «يدخل»، لا تظهر في المقدمات والنتيجة إلا مُنطبِقة على أشخاص يدخلون العمارة. وبالمثل، لم نقم بتحليل «س يراقَب من قبل الحارس»، لأن «يراقَب» تكون متبوعة دائمًا بـ «من قبل الحارس». في المقابل، من المناسب أن نترك «سـ كان مرفوقًا ببعض أعضاء الشركة»، لأن المرافقة والانتماء إلى الشركة يتدخلان أيضًا خارج هذه التركيبة في مجرى المقدمات والنتيجة. وبشكل عام، عندما نجري تشارح الكلمات من أجل إخضاعها للترميز المنطقي، ثم نُدخل، كما فعلنا أعلاه، أحرفًا تصويرية، فإنه من الكياسة ألا نبيّن بنية العبارات أكثر مما يتبدّى ضروريًا للاستنباط المقترح. وهذا القيد لا يُقلّص عمل التشارح فحسب، بل يختصر أيضًا طول وتعقّد الصيغ التي سنشتغل عليها خلال عملية الاستنباط.

وإذا انتقلنا الآن إلى المقدمة الثانية، وكتبنا «ن(سـ) سـ» بالنسبة إلى «سـ كان

أحد رجالات فيوريتشيو»، سنحصل على البنية الخارجية الظاهرة التالية:

V سـ(ن(سـ) . Λك(سـ) . Λ سـ لم يكن مرفوقًا بأيّ شخص آخر).

يبقى أن نجري التشارح على الجملة المكوّنة «سـ لم يكن مرفوقًا بأي شخص آخر». ويتضح أن المعنى المقصود هو:

أيًا كان الشخص الذي يُرافِق سـ فهو من رجالات فيوريتشيو،

وهي العبارة «Λع(م (سـ، ع) ← ن(ع))» بحيث إن المقدمة الثانية للعبارة برمتها تصبح:

V سـ [ن(سـ) . Λ ك(سـ). Λ Λع (م (سـ، ع) ← ن(ع))].

وأما المقدمة الثالثة، والنتيجة فتنتجان مباشرة ما يلي:

Λسـ (ن(سـ) ← ¬ل(سـ)).   V سـ (ن(سـ) . Λع(سـ)).

لنأخذ كمقدمات 4، إذًا، المقدمات الثلاث الحقيقية مع نفي النتيجة، بحيث تكون كلها في صورة شاملة، ثم نواصل العملية بتطبيق الطريقة الأساسية:

المقدمات:

Λسـ V ع (ك(سـ) . Λ ¬ ل(سـ) . ←. م (سـ، ع) . Λع(ع))

V سـ Λع (ن(سـ) . Λ ك(سـ) . Λ م (سـ، ع) ← ن(ع))

Λسـ (ن(سـ) ← ¬ل(سـ))

Λسـ ¬(ن(سـ) . Λع(سـ))

تعيينات:

Λع (ن(هـ) . Λ ك(هـ) . Λ م (هـ، ع) ← ن(ع))

V ع (ك(هـ) . Λ ¬ل(هـ) . ←. م(هـ، ع) . Λع(ع))

ك(هـ) . Λ ¬ل(هـ) . ←. م(هـ، ف) . Λ ع(ف)

ن(هـ) . Λ ك(هـ) . Λ م (هـ، ف) ← ن(ف)

ن(هـ) ← ¬ل(هـ)

¬(ن(ف) . Λع(ف)).

وبإمكان القارئ أن يتحقق من كون التعيينات الأربعة غير المسوَّرة غير متسقة.

عندما نقوم، على هذا النحو، بإضفاء الصرامة المنطقية على الاستدلالات التي ترد بتعابير غير صورية، فمن المحتمل أن نصادف، بالإضافة إلى تشارح التعابير اللغوية بترميز منطقي، مشكلة أخرى تتعلق بالتأويل. وتكمُن هذه المشكلة في تعويض المقدمات المحذوفة، ويرجع أصل هذه المشكلة إلى الممارسة الاعتيادية للحجاج بواسطة القياس المضمَر. والقياس المضمر استدلال منطقي تنقصه واحدة أو أكثر من المقدمات غير المذكورة لكون حقيقتها ترجع إلى المعرفة المتداولة أو بديهية: مثال ذلك القياس الآتي:

بعض اليونانيين حكماء؛ إذًا، بعض اليونانيين فلاسفة.

عندما نهمل ذكر المقدمة المكمِّلة «كل الفلاسفة حكماء» فمردّ ذلك إلى كون كل المهتمين يفترض أن يعرفوها من تلقاء أنفسهم[1].

إن أغلب استدلالاتنا المنطقية في الخطاب اليومي عبارة عن أقيسة مضمرة إذ نعفي أنفسنا باستمرار من تكرار الوقائع المعروفة، بوضع ثقتنا في المخاطب كي يزوّدنا بها حيثما يقتضي ذلك الإنجاز المنطقي للاستدلال. في المقابل، عندما نرغب في تحليل وتقدير استدلال منطقي مُقدَّم لنا، يجب أن نأخذ بعين الاعتبار مقدماته المحذوفة. عندئذ يجب أن نحل مشكلتين في الوقت ذاته: أولهما إنشاء مفصل لاستنباط منطقي يقود المقدمات إلى النتيجة المطلوبة؛ وثانيهما تعزيز المقدمات بحيث يُمكن إنشاء استنباط من هذا القبيل. ويقتضي حل كل مشكلة منهما حل الأخرى؛ إذ لن نستطيع إنشاء الاستنباط دون مقدمات ملائمة، ولن نستطيع معرفة أي المقدمات

(1) لا يُفهم من القياس المضمر في المنطق التقليدي، بكيفية خاصة، القياس ذو المقدمة المحذوفة كالمثال أعلاه. إذ من الطبيعي أن يتجاوز المنطق المعاصر القياس بشكل كبير. ويعتبر القياس المضمر استدلالًا منطقيًا له صورة ما بحيث تكون بعض مقدماته متضمنة.

الإضافية ستكون مطلوبة قبل معرفة كيف ينبغي أن يتم الاستنباط.

نجد أحيانًا، كما هو الحال في القياس السابق، أن صورة الاستدلال المنطقي التي يقصدها المتكلم تقترح ذاتها علينا بكيفية مباشرة لكونها طبيعية ولبساطتها. لا توجد، في هذه الحالة، أية صعوبة في تحديد المقدمة المضمرة في ذهن المتكلم. وعلى العكس من ذلك، تكون صورة الاستدلال نفسها، في حالات أخرى، غير بديهية بشكل تام، في حين أن المقدمات المضمرة المناسبة تكون، بشكل أو بآخر، ظاهرة بسبب التجارب المتقاسمة حديثًا. فلا شيء يميز حالة من هذا القبيل، من الوجهة العملية، عن تلك التي تكون فيها كل المقدمات ظاهرة.

وأخيرًا، نجد أحيانًا أنه لا صورة الاستدلال المقصودة ولا المقدمات المضمرة تكون بديهية في البداية؛ وفي هذه الحالة، يكون أقصى ما نستطيع القيام به هو أن نحاول حل المشكلتين بشكل تنافسي. وهكذا نستطيع أن نقوم بمحاولة استنباط بناء على المقدمات الظاهرة، فإذا وصلنا إلى نفق مسدود، نختلق مقدمة مضمرة معقولة وجديرة بأن تقربنا من النتيجة المطلوبة. وعندما نقوم بالمناوبة بين الخطوات الاستنباطية وتعزيز المقدمات، نتمكن، مع اليسير من الحظ، من بلوغ هدفنا. عادة ما يجب أن تكون المقدمات المضمرة التي نعتمدها، على الدوام، عبارات يُمكن أن تفترض أن كل أجزائها في البداية صادقة؛ لأنه بهذا الشرط فقط يُوفِّر استنباطٌ يستعمل مقدماتٍ مضمرةً أسبابًا للاعتقاد في النتيجة. ولو أننا ذكرنا كمقدمة مضمرة عبارة تكون لها (من جهة نظر الأجزاء المعنية) الحاجة نفسها التي للنتيجة إلى الإثبات، سنقع في ما نسميه استدلالًا دائريًا أو المصادرة على المطلوب (petitio principii). وكل داعم للاقتناع يُمكن أن تستخلصه النتيجة من هذا الاستدلال سيكون محبطًا. إنّ البتّ في ما إذا كانت عبارة ما صادقة منذ البداية بفضل كل الأجزاء لا يعود إلى

علم النفس التطبيقي. غير أنه لا يضع في جل الأحوال أية صعوبة ما دام هناك مسافة شاسعة عادة بين المخارج القابلة للنقاش في الدليل الحقيقي والمصادر المشتركة كأرضيات.

وكمثال على نوع المشكل الذي أتينا على مناقشته توًا، لننظر في المقدمتين والنتيجة الظاهرة:

<u>مقدمتان:</u>

لكل أهالي آجو مؤشر دماغي يصل إلى 96،

كل النساء اللواتي لهن مؤشر دماغي يصل إلى 96 دم البيما (Pima).

<u>نتيجة:</u>

لكل أولئك الذين تكون أُمُّهم من أهالي آجو دم البيما.

لنترجم هذه العبارات إلى رموز منطقية، ولكن مع استعمال هذه المرة اختزالات واضحة بدل الأحرف الصورية «ك» و«ل»، إلخ، لأنه يجب أن نحتفظ في أذهاننا بمعنى الألفاظ حتى نتمكن من التفكير في الأرضيات التي قد نتخذها مقدمات مضمرة. هكذا تكون نتائج الترجمة، مع افتراض مجال القول مكوّنًا من أشخاص كالتالي:

<u>المقدمتان:</u>

Λسـ (سـ من أها ← سـ له 96)،　　　　(أها = أهالي)

Λسـ (سـ إمر. Λ سـ له 96. ← سـ له دم ب).　　(إمر = إمرأة)

<u>النتيجة:</u>

ΛسـΛعـ (سـ أمُّه عـ. Λسـ من أها .← عـ له دم ب)　　(ب = البيما)

فإذا نفينا النتيجة ووضعناها في صورة شاملة، سنحصل على:

Vسـ V عـ ¬ (سـ هي أم عـ. Λ سـ من أها . ← عـ له دم ب).

غير أننا سنفكر جيّدًا في هذه الصيغة لو أننا أخضعناها مباشرة لاختزال صدقي بديهي على النحو الآتي:

Vسـ Vعـ [سـ أم عـ . ∧ سـ من أها . ∧ ¬(عـ له دم ب)].

وسنشرع، في ما بعد، في البحث عن دليل عدم الاتساق بإعمال التعيينات الأكثر طبيعية.

المقدمات:

∧سـ (سـ من أها ← سـ له 96).

∧سـ(سـ إمر. ∧ سـ له 96 . ← سـ له دم ب)،

Vسـ Vعـ [سـ أم عـ . ∧ سـ من أها . ∧ ¬(عـ له دم ب)].

تعيينات:

Vعـ [هـ هي أم عـ . ∧ هـ من أها . ∧ ¬ (عـ له دم ب)]،

هـ أمُّ فـ . ∧ هـ من أها . ∧ ¬ (فـ له دم ب)،

هـ إمر. ∧ هـ له 96. ← هـ له دم ب،

هـ من أها ← هـ له 96.

وحتى نتمكن من إثارة أكبر حدس مقدمات جديدة لنختزل صدقيًّا التعيينات غير المسوَّرة، فترتد التعيينات الثلاثة كلها إلى هذه المعلومة:

هـ أم فـ   هـ من أها،   هـ لها 96،

هـ إمر ← هـ لها دم ب،   ¬ (فـ له دم ب).

فما هي المعلومة المكمِّلة، من صنف الأرضية، التي تكون قادرة على هذه الأسس على إنتاج عدم الاتساق؟ فكونها أمَّ فـ تكون هـ امرأةً. ومن ثم، وبموجب الشرط أعلاه، لها دم البيما؛ ولكن سيكون الشيء نفسه بالنسبة إلى فـ ابنها، بحيث سينقض النفي أعلاه.

وستغدو الأرضيتان المنقِذتان الملفوظتان في صورتين عامتين على النحو التالي:

∧سـ∧عـ (سـ أم عـ ← سـ امرأة)،

∧سـ∧عـ (سـ أم عـ . ∧ سـ له دم ب. ← عـ له دم ب)

سيعتبر ضمُّ هاتين المقدمتين إلى المقدمات الثلاث الأصلية كي تصير خمسًا، [بالنسبة إلى القارئ مجرد مسألة كتابة] واشتقاق تعيينات منها بواسطة الطريقة الصورية التي صارت الآن معتادة إلى أن تصبح زمرة من التعيينات غير المسوَّرة وغير المتسقة صدقيًا.

تمارين

1. اشتق الزمرة غير المتسقة من التعيينات التي ذكرنا توًا.
2. قم بإجراء تشارح نحو الداخل، وترجم رمزيًا على التوالي العبارة الآتية:

كل من يشتري تذكرة يحصل على جائزة

باستعمال «ك(سـ ع)» بالنسبة إلى «سـ اشترى ع»، و«ل(ع)» بالنسبة إلى «ع تذكرة»، و«م(هـ)» بالنسبة إلى «هـ جائزة» و«ع(سـ هـ)» بالنسبة إلى «سـ يحصل على هـ». وبيِّن، بعد ذلك، أن كل هذا يستلزم:

إذا لم تكن هناك جائزة، فلا أحد سيشتري تذكرة.

3. بإجرائك تشارحًا نحو الداخل خطوة تلو الأخرى ترجم رمزيًا:

كل مرشح تم قبوله إلا وسبق امتحانه

باستعمال «ك(سـ)» بالنسبة إلى «سـ مرشح»، و«ل(سـ ع)» بالنسبة إلى «سـ تم قبوله في اللحظة ع»، و«م(سـ هـ)» بالنسبة إلى «سـ تم امتحانه في اللحظة هـ»، و«ع(هـ ع)» بالنسبة إلى «هـ قبل ع». بيِّن، في ما بعد، أن هذا يستلزم:

كل مرشح تم قبوله إلا وامتحن في لحظة ما.

4. بإجرائك للتشارح نحو الداخل، خطوة خطوة، ترجم رمزيًا:

تُوجَد لوحة أعجبت كل النقاد الذين تعجبهم اللوحات كلها

باستعمالك «ك» بالنسبة إلى «لوحة»، و«ل» بالنسبة «نقاد»، و«م» بالنسبة إلى «أعجبت»، ثم أضف المقدمة المكمِّلة:

كل النقاد تعجبهم هذه اللوحة أو تلك

وبيّن أن هاتين المقدمتين تستلزمان:

توجد لوحة تعجب كل النقاد

5. هب أنني أحبُّ شخصًا يسخر من نفسه لكنّه يكره كل من يسخر من كل أصدقائه. بيّن أن هذه المقدمات المعززة بأرضية، تستلزم كلها أنه إذا كان أيًا كان يسخر من كل أصدقائه فإن أحدًا ما ليس صديقًا لنفسه (كويمبي (Quimby)).

32 التمام[1]

لكي نتمكن من إثبات تمام الطريقة الأساسية، سنحتاج إلى ما أسمّيه قانون الوصل اللامتناهي. وهو يقابل جوهريًا ما يعرف في مجال الطوبولوجيا بتمهيدية اللاتناهي لكونيغ (König) أو القضية الممهدة أو مبرهنة المروحة لبراوور (Brouwer)، وفي موضع آخر مبرهنة التراص (compactness theorem). مفاد هذا القانون في الصيغة الملائمة لموضوعنا: **تكون فئة لامتناهية من الصيغ الصدقية متسقة إذا كانت كل فئة من فئاتها الجزئية المتناهية متسقة.**

بتعبير مجازي، نقول إن القانون يقرُّ أنَّ عبارة وصلية لامتناهية من الصيغة الصدقية تكون متسقة إذا كانت كل عبارة وصلية متناهية من صورها متسقة بكيفية مستقلة. وتعطي هذه الصياغة اسمها للقانون، غير أنها صياغة مجازية ليس إلا، لأن الوصليات عبارات، والعبارات بالمعنى الدقيق للكلمة مجرد متواليات متناهية من العلامات. في حين يتحدث المنطوق الحرفي للقانون عن فئة لامتناهية، كما هو الحال أعلاه. وتكون فئة الصيغ الصدقية متسقة إذا وجد إسناد للقيم الصدقية إلى الأحرف القضوية يجعل كل صور الفئة صادقة.

وحتى نرى لماذا يكون قانون العبارة الوصلية اللامتناهية صادقًا، لنفرض فئة لا متناهية كا من الصيغ الصدقية، ولنفرض أن كل عبارات وصلية-كا

(1) كل ما تبقى من الباب الثالث وضع بين معقوفين إذ يُمكن حذفه عندما يتعلق الأمر بدروس مختصرة.

(كل وصل متناهٍ من عناصر كا) متسقة. ولنمثل للأحرف القضوية في هذه الصيغ بـ «ب$_1$» و«ب$_2$»، إلخ.

تعريف: يكون إسناد معين للقيم الصدقية إلى حرف قضوي، أو إلى عدة أحرف قضوية، حميدًا (ما دام الأمر تعلّق بـ كا معينة) إذا لم يكن متنافيًا مع أية وصلية-كا، بحيث ترده إلى ك [قيم صدقية] أو إلى عدم الاتساق.

تعريف: تكون صا$_1$ هي ص أو ك [قيمًا صدقية] بحسب ما إذا كان إسناد ص إلى «ب$_1$» حميدًا أم لا.

قضية ممهدة1: إن إسناد صا$_1$ إلى «ب$_1$» إسناد حميد.

برهان: إذا كان إسناد ص إلى «ب$_1$» متنافيًا مع وصل-كا، وإذا كان إسناد ك إلى «ب$_1$» متنافيًا مع وصل آخر، فإن وصل العبارتين الوصليتين سيكون، بلا أدنى شك، وصل- كا غير متسق، بخلاف فرضيتنا بخصوص كا. ونتيجة لذلك، يجب أن يكون هذا الإسناد أو ذاك من ص وك حميدًا بالنسبة إلى «ب$_1$»، وفي كلتا الحالتين تكون صا$_1$ إذًا، حميدة بموجب تعريفها ذاته.

تعريف: تكون صا$_2$ هي ص أو ك بحسب كون إسناد صا$_1$ إلى «ب$_1$» وص إلى «ب$_2$» إما حميدًا أو غير حميد.

قضية ممهّدة2: إن إسناد صا$_1$ إلى «ب$_1$»، وإسناد صا$_2$ إلى «ب$_2$» حميدان.

برهان: إذا كان إسناد صا$_1$ إلى «ب$_1$»، وإسناد ص إلى «ب$_2$» متنافيين مع الوصل- كا، وإذا كان إسناد صا$_1$ إلى «ب$_1$» و إسناد ك إلى «ب$_2$» متنافيًا مع عبارة وصلية أخرى، فإن مجرد الإسناد صا$_1$ إلى «ب$_1$» سيكون متنافيًا مع وصل العبارتين الوصلتين، بشكل مناقض للقضية المهّدة1. ونتيجة لذلك، إما أن إسناد صا$_1$ إلى «ب$_1$»، وإسناد ص إلى «ب$_2$»، وإما إسناد صا$_1$ إلى «ب$_1$» وإسناد ك إلى «ب$_2$» حميدان. وفي كلتا الحالتين ستكون القضية المهدة2 صادقة بموجب تعريف صا$_2$.

تعريف: صا$_3$ هي إما ص أو ك بحسب ما إذا كان إسناد صا$_1$ إلى «ب$_1$» وإسناد صا$_2$ إلى «ب$_2$»، وإسناد ص إلى «ب$_3$» حميد أو غير حميد.

قضية ممهدة3: إن إسناد صا$_1$ إلى «ب$_1$»، وإسناد صا$_2$ إلى «ب$_2$»، وصا$_3$ إلى «ب$_3$» إسناد حميد.

برهان: انطلاقًا من القضية الممهدة 2 كما كانت القضية الممهدة 2 انطلاقًا من القضية الممهدة 1.

لدينا في هذه التعريفات بداية سلسلة يكون استمرارها بديهيًا. فالقيم الصدقية صا$_1$، صا$_2$، صا$_3$، صا$_4$،.... تكون بواسطتها معرّفة ومعيّنة كي تسند إلى «ب$_1$»، و«ب$_2$»، و«ب$_3$»، و«ب$_4$»،...... فإذا تعقبّنا القضايا الممهّدة إلى القضية الممهدة ن، بالنسبة إلى ن أيًا كانت، نستطيع أن نبين أن إسناد صا$_1$، صا$_2$،...صا$_{\text{ن}}$، إلى ب$_1$، ب$_2$،....ب$_{\text{ن}}$، إسناد حميد. هب، إذًا، إن صورة ما عا في كا، ولنعتبر ن كبيرة إلى حد يُمكن لـ «ب$_1$»، و«ب$_2$»،....، «ب$_{\text{ن}}$» أن تستنفد الأحرف القضوية التي تظهر في عا. سيرد إسناد صا$_1$ وصا$_2$،.....، صا$_{\text{ن}}$ إلى هذه الأحرف عا إما إلى ص أو إلى ك؛ والحال أنه طبقًا للقضية الممهدة ن، لن تردها إلى ك، بل إلى ص. غير أن عا كانت عنصرًا ما في كا، بحيث إن إسناد صا$_1$، وصا$_2$،......، إلى «ب$_1$»، و«ب$_2$»،.... يجعل كل عناصر كا صادقة: وبالتالي تكون كا متسقة، وهذا هو المطلوب إثباته.

سأستوقف برهة كي أنظر في كيفية البناء. بمجرد أن نحدد الفئة اللامتناهية كا، بكيفية أو بأخرى، تغدو القيم الصدقية صا$_1$، صا$_2$، إلخ، محددة بكيفية فريدة بواسطة التعريفات أعلاه. بيد أن هذا لا يعني أننا نستطيع، وحتى نحن نعلم كا، اكتشاف ما إذا كانت صا$_1$، هي ص أو ك، وما إذا كانت صا$_2$ هي ص أو ك وهكذا دواليك. وحتى لو كنّا نتوفر على طريقة للبت في الانتماء إلى كا، فقد لا نحصل منها على أي شيء لتحديد ما إذا كان إسناد ص إلى «ب$_1$» سيكون، أو لا يكون، منافيًا لعبارة وصلية تضم عناصر

كا. ولهذا السبب فإن برهان قانون الوصل اللامتناهي ليس ما يُمكن أن نسميه برهانًا بنائيًا. إذ يقتضي أن نبين وجود بعض المواضيع الملائمة (على سبيل الذكر صا$_1$، صا$_2$، إلخ) دون أن نقول بالتحديد ما هي هذه المواضيع (مثلًا، إن كانت صا$_1$ هي ص أو ك) . إن جزءًا لا يستهان به مما هو مبرهن عليه في الرياضيات ينفلت من كل برهان بنائي، وجزء هام منها تمت البرهنة عليه بطريقة بنائية.

سنتناول الآن مبرهنة التمام للطريقة الأساسية. فهي تثبت أن كل تركيب من الصيغ (صيغة أو أكثر) المسوَّرة إما أنها صادقة مجتمعة بالنسبة إلى تأويل ما في مجال قول غير فارغ، وإما أن تركيبًا غير متسق صدقيًّا من الصيغ غير المسوَّرة يُمكن أن يشتق بواسطة العمليات المعتادة: حوِّل إلى صيغة شاملة، غيِّر أحرف المتغيرات المقيَّدة التي تكون أيضًا أحرف المتغيرات المطلقة، ثم تطبيق ت.ك وت.و، مع استعمال دائم، بالنسبة إلى ت.وفقط، لمتغيرات تعيينية جديدة.

هب إذًا أن مقدمات بعد تحويل إلى صيغة شاملة، وتغيير مناسب للأحرف، تصف طريقة ذات صلابة روتينية من أجل تعيينها التدريجي. ستكون ذات طبيعة تطمئننا أن كل سطر وجودي (أي كل سطر يبتدئ بالسور الوجودي) موضوع بالفعل للتعيين، وأن كل سطر كلي موضوع بالفعل للتعيين بحيث يمثُل كل واحد من المتغيرات المطلقة أمامنا الواحد تلو الآخر.

يبتدئ كل شيء بموجة كبرى من ت.و: كل سطر وجودي موضوع لتعيين، ودائمًا مع استعمال متغير جديد للتعيين. وإذا ما ظهرت أسطر وجودية جديدة خلال العملية، نطبق عليها أيضًا ت.و. وتأتي بعد ذلك موجة كبرى من ت.ك: يكون كل سطر كلي، قديم أو طارئ، موضوع تعيين، مع كل متغير مطلق على حدة يتضمنه البرهان بالفعل. (بعضها يُمكن أن تكون مطلقة في المقدمات؛ وأخرى ستصبح نتيجة لـ ت.و). ثم موجة أخرى لـ ت.و،

تهدف إلى تقديم تعيين لكل سطر جديد وجودي تحمله الموجة ت.ك. وفي ما بعد تأتي موجة مزدوجة من ت.ك: تغدو الأسطر الكلية القديمة موضوعًا لتعيينات بها متغيرات مطلقة أدخلت حديثًا، وكل سطر كلي جديد يكون موضوع تعيين به كل المتغيرات المطلقة التي يتضمنها البرهان. ومرة أخرى موجة ت.و: ثم موجة مزدوجة ت.ك: وهكذا دواليك.

وفي الحالة الخاصة حيث كل المقدمات تكون محصورة وكلية، تكون عملية الانطلاق ضرورية: نطبق، عندئذ، ت.ك باستعمال متغير جديد للتعيين.

إليكم مثال عن هذه الطريقة المتحجرة وسأوسع أبجدية المتغيرات باعتماد العلامات: «هـ'»، «هـ"»، إلخ.

<u>مقدمتان:</u>

Λفـ Vسـ (ك(هـ) V ل(فـ، سـ))

Λفـ Vسـ Λعـ (ل(فـ، سـ) . Λ ⌐ك(عـ))

<u>تعيينات:</u>

Vسـ (ك(هـ) V ل(هـ، سـ))	(الموجة 2، الأولى كانت فارغة)
V سـ Λعـ (ل(هـ، سـ) . Λ ⌐ك(عـ))	(الموجة الثانية)
ك(هـ) V ل(هـ، هـ')	(الموجة الثالثة)
Λعـ (ل(هـ، هـ") . Λ ⌐ ك(عـ))	(الموجة الثالثة)
Vسـ (ك(هـ) V ل(هـ'، سـ))	(الموجة الرابعة، الجزء الأول)
Vسـ (ك(هـ) V ل(هـ"، سـ))	(الموجة الرابعة، الجزء الأول)
Vسـ Λعـ (ل(هـ'، سـ) . Λ ⌐ك(عـ))	(الموجة الرابعة، الجزء الأول)
Vسـ Λعـ (ل(هـ"، سـ) . Λ ⌐ك(عـ))	(الموجة الرابعة، الجزء الأول)
ل(هـ، هـ") . Λ ⌐ك(هـ)	(الموجة الرابعة، الجزء الثاني)
ل(هـ، هـ") . Λ ⌐ك(هـ')	(الموجة الرابعة، الجزء الثاني)

ل(هـ، هـ") . ٨ ¬ك(هـ")　　　　(الموجة الرابعة، الجزء الثاني)

ك(هـ) ٧ ل(هـ'، هـ''')　　　　(الموجة الخامسة)

ك(هـ) ٧ ل(هـ"، هـ'''')　　　　(الموجة الخامسة)

وهكذا دواليك. من الأفضل للقارئ أن يتحقق من ملاءمة هذا المثال لعمليتنا المتحجرة.

تنتهي بعض الأمثلة، إما إلى الاتساق أو عدمه، وأخرى لا تفعل ذلك. وعندما تكون الحالات غير منتهية، تدمج متغيرات مطلقة جديدة بلا حد من قبل ت.و؛ وبإمكاننا أن نأخذ بعين الاعتبار كونها تتوالد بشكل منهجي، عبر توالي العلامات المقرونة بالمتغيرات، كما هو أعلاه.

وفي كل الأحوال، بإمكاننا أن نتيقن، بالنسبة إلى كل سطر كلي، وبالنسبة إلى كل متغير مطلق يتبدى لنا، أن هذا السطر سيكون، في النهاية، موضوع تعيين بواسطة هذا المتغير. وذلك لأن كل موجة من ت.و تحمل متغيرات جديدة تتبعها موجة من ت.ك تستعمل هذه المتغيرات كلها. بالإضافة إلى ذلك، يجب على كل سطر وجودي أن يكون، في نهاية المطاف، ولو مرة، موضوع تعيين. وبموجب طريقتنا، سيحصل سطر وجودي، بالفعل، على تعيين بمجرد أن تتضح المهمة اللامحدودة، وهي مهمة محدودة.

لتكن با$_1$، با$_2$،...، والترتيب هنا اعتباطي، كل الصور الناتجة عن تطبيق أحرف الحدود للمقدمات على المتغيرات التي توجد مطلقة في المتوالية، التي قد تكون لامتناهية، من التعيينات المتولّدة بواسطة عمليتنا. وهكذا، كما في المثال السابق، يُمكن لـ با$_1$، با$_2$... أن تكون «ك(هـ)»، «ل(هـ، هـ')»، «ك(هـ')»، «ل(هـ، هـ')»، «ل(هـ'، هـ)»، «ل(هـ'، هـ')»، و«ك(هـ")»، وهلم جرّا. سيتوقف وجود حد لـ با$_1$، با$_2$،...، إلخ. على وجود حدٍّ للتعيينات: يوجد هذا الحد في بعض الأمثلة، ولا يوجد في أمثلة أخرى، وفي كل الأحوال، ستكون التعيينات غير المسوَّرة دوالّ صدقية لـ با$_1$، با$_2$، إلخ.

كان علينا أن نبين إما أن المقدمات تغدو صادقة بالنسبة إلى بعض التأويلات في مجال غير فارغ، وإمّا أن مجموعة من التعيينات غير المسوَّرة تكون غير متسقة صدقيًّا. وسنبين، إذًا، أن الأمر على هذا النحو حتى لو اقتصرنا على اعتبار التعيينات المولِّدة بواسطة الطريقة المتحجرة كما وصفناها أعلاه.

سأثبت هذه المبرهنة على النحو الآتي: إذا كانت كل مجموعة متناهية من التعيينات غير المسوَّرة متسقة صدقيًّا، فإن المقدمات تكون صادقة بالنسبة إلى تأويل داخل مجال غير فارغ- ومجال مكوَّن، بالفعل، من أعداد طبيعية موجبة.

ولنفرض، إذًا، أن كل مجموعة متناهية من التعيينات غير المسوّرة متسقة، وَفقًا لقانون الوصل اللامتناهي (الذي يستعمل با$_1$، با$_2$، إلخ.، مكان ب$_1$، ب$_2$،...الخ.، في هذا القانون)، يوجد إسناد سا للقيم الصدقية من صا$_1$، صا$_2$،... إلى با$_1$، با$_2$،...يجعل كل التعيينات غير المسوَّرة صادقة. وهب، الآن، أن مجال القول يتكون من الأعداد الصحيحة الموجبة بقدر ما يوجد من المتغيرات المطلقة في التعيينات، أي كل الأعداد الصحيحة الموجبة إذا كانت المتغيرات غير متناهية. ولنقم بتأويل المتغيرات مرة أخرى، بحسب ترتيب ظهورها الأول إن شئنا، كما لو كانت تسمّى 1، 2، إلخ. ولنؤول، أخيرًا، كل حرف حدّي باعتباره يصدق فقط على الأعداد الصحيحة، أو على الأزواج، إلخ، التي يقر الإسناد سا بكونها صادقة.

وبعد هذا، لنعد إلى مثالنا. سيكون الإسناد سا للقيم الصدقية إلى «ك(هـ)»، و«ل(هـ هـ)»، «ك(هـ')»، و«ل(هـ هـ')»، إلخ، الذي يجعل كل التعيينات غير المسوّرة اللامتناهية العدد لهذا المثال صادقة كالآتي: ك لكل الصيغ «ك(هـ)»، «ك(هـ')»، إلخ، وص لكل الصيغ «ل(هـ هـ)»، «ل(هـ هـ')»، «ل(هـ'، هـ)»، «ل(هـ'، هـ')»، «ل(هـ هـ")»، و«ل(هـ'، هـ")»، «ل(هـ"،

هـ)» إلخ. لنعتبر هـ إذًا، تمثل 1، وهـ′ تمثل 2، وهـ″ تمثل 3، إلخ. ونؤول «ك» باعتبارها لا تصدق على أيّ عدد صحيح، و«ل» باعتبارها تصدق على كل أزواج الأعداد الطبيعية الصحيحة. عندئذ سيبدو المثال في غاية الابتذال.

تكمن الفكرة، باختصار، في تأويل أحرف الحدود بحيث تنقل إلى با$_1$، با$_2$، إلخ، القيم الصدقية على التوالي، لـ صا$_1$، صا$_2$ إلخ. وعند تحقيق الإسناد سا بهذه الكيفية، يجعل التأويل كل التعيينات غير المسوّرة صادقة.

غير أنه ضمن هذه الشروط يكون كل تعيين يشمل سورًا واحدًا صادقًا أيضًا، بمجرد أن يكون هذا السور وجوديًا. وذلك لأننا متيقنون من كون كل سطر من هذا الصنف (أي كل سطر وجودي) هو، بالفعل، موضوع لتعيين: بالإضافة إلى أن تعيينه سيستلزمه، لأن «...هـ...» تستلزم «Vسـ (...سـ...)»، وسيصدق تعيينه، لكونه غيرَ مُسوّر.

وبالمثل نجد، أيضًا، أن كل تعيين يضم سورًا واحدًا سيصدق إذا كان هذا السور سورًا كليًا. لأننا إذ نعيّنه كالآتي: «Λسـ (...سـ...)» نتيقن أن كل سطر من هذا النوع هو بالفعل موضوع تعيين مع كل متغير من المتغيرات المطلقة التي قد ترد فيه. غير أن كل هذه التعيينات-الكلية «...هـ...»، و«... هـ′...» إلخ تكون صادقة، لكونها غير مسوّرة، علاوة على أن الأعداد الصحيحة 1، 2، إلخ، التي هي تأويلات لهذه المتغيرات، تستنفد مجال القول: «...سـ...» صادقة على كل شيء في المجال، وبالتالي تكون «Λسـ (...سـ...)» صادقة.

عندما انطلقنا من صدق كل التعيينات غير المسوّرة، استطعنا أن نستدل منها على صدق كل التعيينات التي تضم سورًا واحدًا. وإذا انطلقنا مجددًا من النتيجة نفسها فسنبين بطريقة مماثلة أن كل التعيينات التي تضم سورين تكون صادقة. وبتكرار هذا الاستدلال عددًا ما تضم المقدمة من الأسوار، سنثبت في نهاية المطاف أن كل مقدمة صادقة.

وهكذا يظهر أن الصور تصدق بالنسبة إلى تأويل داخل مجال قول غير

فارغ. ومجال القول لم يكن فارغًا بفضل عملية الانطلاق الأولي التي تضمن على الأقل وجود متغير مطلق وبالتالي وجود عدد صحيح.

لمحة تاريخية: يعود اكتشاف برهان التمام، وعملية البرهنة عليه بالنسبة إلى منطق التسوير، إلى أعمال كلّ من سكولم (Skolem) وهيربراند (Herbrand) وغودل (Gödel) 1928-1930. وقد أصبح التمام صريحًا مع غودل. وأما طرائق البرهنة عند هؤلاء فمختلفة عن طريقتنا، إلّا أنّ هذا الاختلاف غير ذي أهمية: يُمكن تكييف برهان التمام الخاص بنظرية التسوير بسهولة مع باقي الطرائق. ففي التكييف أعلاه، اعتمدت جزئيًّا، على البرهان الأصلي الذي صاغه غودل، واعتمدت في جزء آخر على تنويع أجراه دريبن (Dreben).

تمارين

1. واصل العمليات التعيينية التوضيحية التي أجريناها على المثال الوارد في هذا الفصل: وأضف عليها اثني عشر تعيينًا.
2. حدد، بافتراضك أن عناصر كا هي «ب$_1$ ← ¬ب$_2$» «ب$_2$ ← ¬ب$_3$» «ب$_3$ ← ¬ب$_4$»، هكذا دواليك، حدد صا$_1$، صا$_2$، صا$_3$، إلخ.
3. يبدأ تعريف صا$_ن$ الذي قدمناه، بالنسبة إلى كل ن، بما يلي: «إن صا$_ن$ هي إما ص أوك بحسب ما إذا...». حاول، باستعمال هذه الصيغة، أن تقرأ «صا$_ن$ هي ك أو ص بحسب ما إذا...». هل يُمكن البرهنة على القضايا الممهّدة 1 و2 و3 إلخ، بعد هذا التغيير في القيم؟ تحقق من كل مرحلة.

33 مبرهنة لوفنهايم

يصلح برهان التمام كذلك، في الوقت نفسه، لإثبات مبرهنة قديمة في غاية الأهمية تعود إلى لوفنهايم (1915): إذا كانت صورة مسوَّرة صادقة بالنسبة إلى تأويل في مجال غير فارغ، فإنها تصدق بالنسبة إلى تأويل داخل الأعداد الصحيحة الموجبة. وسنبرهن على ذلك كما يلي. لا يُمكن أن يتولد عن الصورة عدم الاتساق، متى أخضعناها للطريقة الأساسية، لأن هذه الطريقة سليمة (الفصل 30). وبموجب برهان التمام الوارد في الفصل السابق، ستكون الصيغة (إذا كان صيغة شاملة) صادقة بالنسبة إلى تأويل داخل مجال قول غير فارغ من الأعداد الصحيحة الموجبة. غير أنه، تبعًا للدليل الوارد في منتصف الفصل 18، ستكون، أيضًا، صادقة بالنسبة إلى تأويل في كل مجال ذي محتوى، وبالتالي في مجال كل الأعداد الصحيحة الموجبة. وهكذا تكون مبرهنة لوفنهايم صالحة بالنسبة إلى الصيغ الشاملة، ومن ثم تسري على باقي الصور، لأنها كلها يُمكن أن تُحوَّل إلى صيغة شاملة.

لا فرق بين إثبات صلاحية مبرهنة لوفنهايم للصيغ المفردة أو إثبات صلاحيتها لفئات متناهية من الصور من هذا القبيل، لأن صيغًا ذات عدد محدود يُمكن أن تجمَّع بواسطة الوصل. بيد أن توسيعها لتشمل فئات لامتناهية من الصيغ يشكل توسيعا أصيلا، وهو ما أنجزه سكوليم سنة 1920. فصارت مبرهنة لوفنهايم-سكوليم كالآتي: إذا صدقت كل صور فئة الصيغ التسويرية مجتمعة بالنسبة إلى تأويل في مجال قول غير فارغ، فإنها تصدق مجتمعة بالنسبة إلى تأويل في مجال الأعداد الصحيحة الموجبة.

يظل التدليل هو نفسه الذي نجده في مبرهنة التمام. لنفرض الآن أن لدينا فئة فا لامتناهية ومتسقة من الصيغ الشاملة، ولتكن فا$_1$ هي فا زائد كل التعيينات-تا المباشرة لهذه الصيغ، زائد التعيينات-تا لهذه التعيينات، وهكذا دواليك، مع متغير تعيين جديد بالنسبة إلى كل واحدة منها؛ ولتكن فا$_2$ هي فا$_1$ زائد تعيينات كل صيغها الكلية، وكون كل متغيرات التعيين متغيرات مطلقة لـ فا$_1$، ولتكن فا$_3$ هي فا$_2$ زائد تعيينات-تا؛ وهكذا دواليك. وبهذا نجد بالتحديد طريقتنا متحجرة ما عدا في كونها تكف، تقريبًا، عن أن تكون طريقة متعلقة بالعمليات لتغدو، بالأحرى، تعريفًا لسلسة صاعدة من الفئات اللامتناهية.

وأخيرًا لننظر في كل التعيينات غير المسوّرة التي نبلغها في إحدى الفئات فا$_1$، فا$_2$... إذا كانت زمرة متناهية من هذه التعيينات غير متسقة صدقيًا، سيكون بإمكاننا أن نثبت بواسطة الطريقة الأساسية عدم الاتساق الملازم لصور الفئة فا التي شكّلت مصدرها الأول. والحال أن الفئة الأصلية فا، كانت برمتها متسقة بموجب الفرضية. نستنتج، إذًا، أن كل زمرة متناهية من التعيينات غير المسوّرة تكون متسقة صدقيًا، رغم أنها تكون، بموجب قانون الوصل اللامتناهي، كلها كذلك. يبقى أن نحصل، انطلاقًا من التعيينات غير المسوّرة، على با$_1$، با$_2$،... كما في الفصل 32، ثم سا، ثم تأويل الأحرف الحملية داخل مجال الأعداد الصحيحة الموجبة.

من النتائج الهامة لمبرهنة لوفنهايم- سكوليم، جراء توسيعها لتشمل فئات لامتناهية من الصيغ، يُمكن أن نستشف ما يلي: لنأخذ مجال قول مق غير فارغ أيًا كان، ثم لنأخذ مجموعة منظمة من الحدود، تؤول كلها داخل هذا المجال. ولنأخذ، فضلًا على ذلك، المجموعة اللامتناهية من الحقائق، المعلومة والمجهولة، والقابلة للصياغة بواسطة المحمولات المكمَّلة بواسطة الدوال الصدقية والتسوير المقترن بـ مق. تضمن لنا مبرهنة

لوفنهايم -سكوليم، إذًا، وجود إعادة تأويل للحدود، داخل مجال الأعداد الصحيحة الموجبة، تحافظ على متن الحقائق برمته.

إذا أخذنا، على سبيل المثال، مق كمجال للأعداد الحقيقية، فإنّ المبرهنة ستقرّ بأنه بالإمكان، بواسطة إعادة التأويل، صوغ حقائق تتعلق بالأعداد الحقيقية عن حقائق تتعلق بالأعداد الصحيحة الموجبة. وقد اعتبرت هذه النتيجة مفارقة، على ضوء برهان كانتور (Cantor) الذي يقر بأن المقابلة التامة بين الأعداد الحقيقية والأعداد الصحيحة مستحيلة. ومع ذلك، يُمكن أن تزول المفارقة بالتفكر التالي: أيًا كانت الفروق بين الأعداد الحقيقية والأعداد الصحيحة التي قد تكون مضمونة في الحقائق الأصلية المتعلقة بالأعداد الحقيقية، فإن الضمانات نفسها تكون خاضعة للمراجعة في إعادة التأويل.

وبكلمة جامعة، تكمُن قوة مبرهنة لوفنهايم-سكوليم في كون البنية المنطقية البحتة لنظرية ما، أي البنية التي تنعكس في التسوير والدوال الصدقية، بغض النظر عن كل محمول خاص- تكون غير كافية لتمييز مواضيع هذه النظرية عن الأعداد الصحيحة الموجبة.

لا يعني القول بأن صورة أو فئة من الصور صادقة بالنسبة إلى تأويل ما في مجال الأعداد الصحيحة الموجبة القول بأنه يُمكننا أن ننتج تأويلات مخصوصة لـ «ك(مـ ع»، و«ل(س)» إلخ، في شكل تعبيرات بترميز حسابي. يضمن لنا برهاننا المتمثل في مبرهنة لوفنهايم أنه بالنسبة إلى كل صورة متسقة، يوجد تأويل يكون صادقًا في مجال الأعداد الصحيحة الموجبة؛ غير أنه لا يزودنا بأية وسيلة لاكتشافه أو التعبير عنه. لقد كان برهاننا يستعمل مبرهنة التمام التي كان برهانها يستدعي إجمالًا مواضيع غير بنائية صا$_1$، صا$_2$، إلخ. علاوة على أن حجتنا لا تجعلنا نثق أكثر في كون التأويل، وإن اكتشفناه، قد يُعبَّر عنه بمصطلحات حسابية صرفة، أي مفردات مكونة

من«زائد»، و«على»، و«قوة» و«يساوي»، وحدود أخرى مماثلة.

ومع ذلك، توجد صيغة متطورة لمبرهنة لوفنهايم، ذات معنى بنائي، تعود إلى هيلبرت وبيرنايس[1] (Hilbert-Bernays) والتي تفيد كل ما يلي: كيف نوجد وننتج فعلًا، بالنسبة إلى كل صورة متسقة، تأويلًا صادقًا داخل مجال الأعداد الصحيحة الموجبة، أي بترميز حسابي خالص. يظهر، في الحقيقة، أن مفردات من قبيل «زائد» و«على»، و«تساوي» وكذا الأسوار والدوال الصدقية كافية، ولتكن، كما يقال، مفردات النظرية الأولية للأعداد.

يظهر أن هذه النتيجة ما تزال لافتة للنظر عندما نقرأ، كما سنفعل في الفصل القادم، أنه لا وجود بتاتًا لتقنية عامة لإثبات الاتساق بشكل تام. فكيف استطاع هيلبرت وبيرنايس، إذًا، أن يقدما قاعدة عامة لإنتاج تأويل صادق، بالنسبة إلى صيغة متسقة؟ إن ما يقدمانه هو قاعدة عامة لإنتاج صيغة معطاة أيًا كانت، تأويلًا حسابيًا يُمكن أن نعتمد على صدقه في حالة ما إذا كانت الصيغة متسقة.

إن برهان ومبرهنة لوفنهايم-هلبرت-بيرنايس تتجاوز نطاق هذا الكتاب؛ ومع ذلك، يجدر بنا أن نشير إلى ما ترتبه من أثر على مفهوم التأويل نفسه.

لم نتوفر، في الفصلين 18 و27 على أية صياغة تامة لما يُمكن أن نعتبره تأويلًا لحرف حدّي، بل على صياغة لما يدل على واحد مُعطى: أي أن نثبت بخصوص بعض عناصر المجال، أو بعض الأزواج، إلخ، أن الحرف يجب أن نعتبره صادقًا. ومن بين طرق الإثبات توفير المجرد (الفصل 26)، غير أن هناك طرقًا أخرى أكثر خطابية. بالإضافة إلى ذلك، يتضمن الإجراء، إلى جانب درجات التأويل الذي قمنا به: إننا نؤول حرفًا حدّيًا كلما أثبتنا ما الذي ينبغي أن يصدق عليه.

---

(1) Volume 2, pp. 234-253,
من أجل صيغة مقواة ومبرهنة بشكل أبسط انظر: Kleene, 1952, p. 394, Theorem 35.

ولكي نواجه المشكلة مباشرة: ما المقصود بالتأويل؟ هل هو مجرد تعبير، يفيد معرفة الحد الذي نكون مستعدين لإبداله بحرفه حدّي؟ أم هو فئة تفيد معرفة فئة الأشياء التي يُعتبر الحرف الحدي بالنسبة إليها صادقًا؟ ينبغي أن يقود الخيار، للوهلة الأولى، بين هاتين الإمكانيتين إلى اختلاف مهم: وذلك لأنه لاشيء يجعلنا نوقن أن كل فئة من مواضيع مجالنا يُمكن أن تُخصص كماصدق حدٍّ ما أو كعبارة مهملة من لغتنا. يتوقّف هذا على اختيار مجال القول، وكذا على غنى المفردات التي نفترض أنها متاحة لنا من أجل الترميزات المنطقية للدوال الصدقية وللتسوير. إذا تجاوزت الفئات العبارات المتاحة، فسيكون بمقدورنا، إذًا، أن نتوقع الاختلاف، مثلًا في مفهوم الصحة، بحسب ما نعرِّف به هذه الأخيرة باعتبارها الصدق بالنسبة إلى كل التأويلات بمعنى الفئات، أو باعتبارها الصدق بالنسبة إلى كل التأويلات بالمعنى الحدّي. وفضلا عن ذلك، لقد اعترفت النظرية الكلاسيكية للمجموعات منذ كانتور بمبدأ أن الفئات تتجاوز العبارات.

بيد أنه من النقط اللافتة للنظر في مبرهنة لوفنهايم-هلبرت-بيرنايس هي أنها تحسم في كل هذا، فمهما بلغ تجاوز الفئات للعبارات، فإن المبرهنة توقننا من أنه عندما نعرف الصحة والاتساق يكون حديثنا عن كل أو بعض التأويلات بمعنى الفئات أو بمعنى الحدود سواء. كما توقِننا المبرهنة من كون كل الفئات الفائضة لن يكون لها تأثير في ما يخص الصحة أو الاتساق، وذلك بالمعنى التالي: إذا كانت صورة ما قد استوفيت (أو كُذِّبت) من قبل تأويل غير قابل للتخصيص يتضمن فئات لا تتوفر على أسماء، فإنها تكون مستوفاة كذلك (أو كُذِّبت) من قبل تأويل آخر يُمكن أن نرمز له بواسطة الترميز الحسابي.

والحق أن مبرهنة لوفنهايم-هلبرت-بيرنايس تجعلنا نستغني تمامًا عن مصطلح «تأويل» وتجعلنا نتكلم مباشرة عن الإنابة. تكون صورة ما

صحيحة إذا كانت كل العبارات التي يُمكن أن نحصل عليها منها بواسطة الإنابة صادقةً، وتكون متسقة إذا كانت بعض من هذه العبارات صادقة. تجعلنا المبرهنة نوقن من مثل هذه الإنابات أننا قد نتراجع بحصانة إلى هذه الصياغة المتواضعة كلما كانت المفردات التي نفترض أنها متاحة لمثل هذه الإنابات لم تعد فقيرة إلى درجة لا تكفي لتستوفي النظرية الأولية للأعداد.

هناك قناعة فلسفية معينة في ضمانة كوننا نستطيع الحديث عن الصحة المنطقية وعن الاتساق دون أن نستدعي مملكةً لا محدودة من المواضيع المجردة المسماة فئات. وإننا لنشعر، ونحن نتكلم عن إنابة العبارات، أننا نضع أقدامنا على أرض صلبة.

يُمكن أن نبدي ملاحظة ذات صلة مباشرة على أساس مبرهنة التمام، وفي استقلال حتى عن مبرهنة لوفنهايم وهلبرت وبيرنايس. تزودنا هذه المبرهنة الأولى فعلًا بصياغات للصحة وللاتساق لا تذكر البتة الفئات، ولا تذكر حتى في الحقيقة إنابة المحمولات. تكون صيغة ما صحيحة إذا أمكن، متى انطلقنا من الصيغة الشاملة لنفيها، أن نشتق منها بواسطة الطريقة الأساسية عدم الاتساق الصدقي.

34 البتّ وامتناع البتّ

لا فرق، بالنسبة إلى الطريقة الأساسية، بين أن نكتب أولا نكتب مقدماتنا بأسوار وجودية في صدرها. ولا داعي لأن نعجب من هذا الأمر، لأننا أشرنا بالفعل في بداية الفصل 25، أنّ الأسوار الوجودية الموجودة في بداية العبارات لا تؤثر في الاتساق. يتعلق عدم التأثير هذا في الطريقة المتحجرة الواردة في الفصل 32، والتي تقرّ أن السور الوجودي إذا لم يكن مسبوقًا بسور كلي، يكون موضوعًا لعملية تعيين واحدة؛ ولن نعود إليه على الإطلاق. فالتعيين- و، بمتغير تعيينه، كان من الممكن أن يكون المقدمة التي نبدأ بها.

إن ما يجعل الاستدلالات طويلة هي الأسوار الوجودية المسبوقة بالأسوار الكلية. وكل سور وجودي في هذا الوضع يظهر على السطح عدد المرات التي تكون فيها الأسوار الكلية موضوعًا لتعيينات مختلفة. تكون في كل مرة تظهر فيه موضوع تعيين جديد لأن السطر الذي تتصدره يتغير في كل مرة عند تلقيه متغيرات تعيينات مختلفة خلال خطوات ت.ك. وكل واحدة من خطوات ت.و تزودنا، إذًا، بمتغير جديد، كطعم لـ ت.ك أخرى، وبهذه الكيفية وإلى ما لا نهاية له، ويمكن أن نواصل طحن هذه التعيينات. ينبغي أن نعتبر المثال غير التام الذي سقناه في منتصف الفصل 32 ضمن هذا المنظور.

إذا كانت كل المقدمات على نحو لا تكون فيه الأسوار الوجودية مسبوقة، في أي حالة، بأسوار كلية، فإن الطريقة المتحجرة الواردة في الفصل 32

ستنتهي دائمًا إلى حدٍّ من أجل إرضائنا. وحدها تتدخل عملية التزويد الأصلي والثابتة بالمتغيرات المطلقة حقًا -أو ما يكافئها- وتكون الوحيدة التي تستعملها ت.ك. وسيكون العدد الإجمالي للتعيينات التي تسمح بها طريقتنا المتحجرة، بالنسبة إلى كل مقدمة من هذا النوع، مساويًا لعدد الأسوار الكلية للمقدمة مضروبًا في العدد الإجمالي للمتغيرات المطلقة (أوالوجودية) المتواجدة في المقدمات. والحق، كما أسلفنا الذكر، أن الأسوار الوجودية، باعتبارها موجودة هنا على رأس المقدمات، يُمكن حذفها في البداية؛ ولن تغدو مقدماتنا شيئًا آخر سوى الصيغ الكلية الخالصة. وبإمكاننا أن نتحقق، إذًا، من الاتساق الصدقي لكل التعيينات غير المسورة، مع ضمان الإجابة الموجبة أو السالبة. لم نعد إذًا في موقف التحقق فقط أكثر فأكثر من عدم اتساق التعيينات غير المسوّرة دون أن تكون لدينا فكرة على الإطلاق عن اللحظة التي ينبغي أن نتوقف فيها؛ إننا نتوفر على طريقة في البت.

لقد تطرقنا في الفصل 29 إلى طريقة البتّ تهدف إلى إثبات صحة الصيغ الوجودية الخالصة؛ وقد كانت تشكل، ضمنيًا، طريقة في البتّ بالنسبة إلى اتساق الصيغ الكلية الخالصة. تكون الصورة غير متسقة بالفعل، إذا وفقط إذا، كان نفيها صحيحًا؛ ويصبح نفي الصيغة الكلية الخالصة صيغة وجودية خالصة بواسطة قاعدتي تحرك الأسوار (9) و(10) من الفصل 23. تكمُن أهمية طريقة البتّ بالنسبة إلى الاتساق التي نبعث توا من الطريقة الأساسية، في الصيغة الخالصة التي ظهرت من خلالها، وكذا في علاقتها بالطريقة الأساسية. فهذه الأخيرة تقترح أننا عندما نحول الصيغ إلى صورة شاملة، من المناسب أن نعطي الامتياز للأسوار الوجودية إذا كنا نفكر في تطبيق الطريقة الأساسية، أي عكس ما كنا نقوم به عندما نحاول الحصول على الصيغ الوجودية الخالصة. الحقيقة أنه بإمكاننا، دون عناء، أن نناوب الطرائق عندما نرى ذلك مناسبًا، بفضل قاعدتي تحريك الأسوار (9) و(10)

اللتين ذكرناهما في الفصل 23.

لقد أشرت مرتين إلى استحالة طريقة البتّ بالنسبة إلى الصيغ التسويرية عمومًا. والبرهان الذي يعود إلى تشورتش (Church) وتورينغ (Turing) سنة 1936، يتجاوز نطاق هذا الكتاب[1]. غير أن بعض الملاحظات تفرض نفسها في ما يتصل بدلالتها. إنها لا تستبعد طرقًا استدلالية آلية: ومن بينهما الطريقة المتحجرة الواردة في الفصل 32. وكل طريقة استدلالية يُمكن أن تُرد، من حيث المبدأ، إلى طريقة آلية على الأقل في صورة غير ذكية كالآتي: تحقق -لا أقل ولا أكثر- من كل الخصائص النموذجية الخاصة التي تكون مقبولة في الطريقة الاستدلالية المعنية، ثم من كل الأزواج الممكنة التي لهذه الخصائص، ثم من كل سلسلة من ثلاث خصائص، وهكذا دواليك إلى أن نحصل على البرهان. إن الاعتماد المعتاد على الحظ والاستراتيجية في استكشاف البراهين لهو، بكل بساطة، الثمن الذي نؤديه من أجل الإسراع أكثر: أي الاستباق، بالدقائق أو بالأسابيع، ما يُمكن أن تنتجه الطريقة الآلية.

إن ما يميز برهان البتّ التام عن طريقة في البتّ ليس هو، إذًا، كون أحدهما أقل آلية من الأخرى. إنما يكمُن الاختلاف في كون برهان البتّ لا يجيب بنعم أولا: ولا يمدّنا بأي جواب سالب. فاستحالة التوصل إلى برهان عدم الاتساق بعد عدد كبير من الخطوات، مهما كان إجراؤها آليًا وممنهجًا، لا يبرهن على الاتساق. إن برهان البتّ هو فقط نصف طريقة البت.

عندما تتواجد، في الآن نفسه، طريقة برهنة وطريقة إبطال (بالنسبة إلى الصحة أو الاتساق، أو أية خاصية أخرى)، توجد، أيضًا، طريقة في البت[2]. يُمكن لهذين النصفين أن يجتمعا بالطريقة التالية: نضفي في البداية

(1) للحصول على عرض واضح انظر كتابي:
Selected logic Papers, pp. 212- 219.

(2) تعود هذه الملاحظة إلى كلين (Kleen)، 1943. انظر أيضًا كلين (1952)، ص. 284. المبرهنة VIc.

الطابع الآلي على طريقة البرهنة وطريقة الإبطال، في الوقت نفسه، ولتكن بالكيفية نفسها غير الذكية المشار إليها آنفًا أو بكيفية أخرى. ثم لكي نبتّ في ما إذا كانت صيغة ما تتوفر على الخاصية المعنية (الصحة أو الاتساق أو أية خاصية أخرى)، نضع شخصًا (أو آلة) ليقوم بالبرهنة، وشخصًا آخر ليقوم بالإبطال، ثم ننتظر الإجابة المحتملة لأحدهما.

وفي ظل هذه الشروط نستنتج أنه: **لا وجود لأية طريقة تامة لإثبات اتساق الصيغ التسويرية** بموجب أننا نعلم كما أوردنا في الفصل 32 أنه توجود طريقة تامة لإبطال اتساق الصيغة التسويرية، نعلم أنه لا وجود، حسب تشورش وتورينغ، لأية طريقة للبت. عادة ما نبرهن على اتساق صورة ما عن طريق إنتاج تأويل صادق؛ وهذه الكيفية تظل هي الأفضل بكل تأكيد طالما أننا نظفر بحقائق تخدم بحثنا ونبين أنها صادقة. إن ما ينبغي الاعتراف به، إذًا، هو أنه لا طريقة في البرهنة الصحيحة يُمكن أن تكون من القوة بحيث توفر براهين على عبارات تزودنا بأمثلة عن كل الصيغ التسويرية المتسقة.

توجد، مع ذلك، طريقة بديهية تمكن من البتّ في ما إذا كانت صورة ما تصدق بالنسبة إلى كل تأويل، أو تأويل ما، أو لا تصدق بالنسبة إلى أي تأويل في مجال ذي بعد متناهٍ معطى ن: نترجم التسويرات الكلية والوجودية إلى وصليات وفصليات ذات ن من الحدود، كما بيّناه في الفصل 27 ثم نتحقق من صحتها أو اتساقها من وجهة نظر صدقية. تكون النتيجة هي وجود طريقة تامة (ليست طريقة البت، بل فقط طريقة البرهنة) لتبيان أن الصيغة متسقة حيال المتناهي- أي إنها تغدو صادقة، على الأقل بالنسبة إلى تأويل على الأقل في مجال متناهٍ غير فارغ. وتقتضي هذه الطريقة في البرهنة التسليم فقط ببعد مطابق ن للمجال، ثم نترك للقارئ القيام بالتحققات بواسطة الطريقة الصدقية.

وعلى هذا النحو يبرُز تعارضٌ هامٌ بين المجالات المتناهية واللامتناهية: هناك طريقة في البرهنة تامة بالنسبة إلى الاتساق المتناهي، ولكن لا وجود لأية طريقة تخص البرهنة على الاتساق. تمثل الصيغ المتسقة، التي لا تخص المتناهي، الفئة العنيدة. ويمكن أن نطلق عليها اسم الصيغ المتعلقة باللاتناهي. وإليكم مثال يسهل التعرف عليه:

(1) Λسـ [¬ ك(سـ، سـ) . ∧ Λع Λهـ (ك(سـ، ع) . ∧ ك(ع، هـ) . ← ك(سـ، هـ)) . ∧ Vف (ك(سـ، ف)]

يتطلب مجالًا لامتناهيًا، لأنه يفترض أي شيء سـ$_1$. وَفقًا للجزء الأخير من (1) تكون لدينا: ك(سـ$_1$، سـ$_2$) بالنسبة إلى سـ$_2$؛ وبالمثل ك(سـ$_2$، سـ$_3$) بالنسبة إلى سـ$_3$؛ وهكذا إلى ما لانهاية. بواسطة التعدي المثبت وسط (1)، نحصل كذلك على ك(سـ$_1$، سـ$_3$)، ك(سـ$_1$، سـ$_4$)، ك(سـ$_2$، سـ$_4$)، ك(سـ$_1$، سـ$_5$) وهكذا دواليك. ومن جهة أخرى، وبسبب «¬ك(سـ، سـ)» في (1)، تكون هذه الأشياء سـ$_1$، سـ$_2$، سـ$_3$،...كلها متباينة. وبذلك لا تكون (1) متسقة بخصوص التناهي. والحال أنها متسقة، وهذا صحيح، في مجال الأعداد الصحيحة إذا ما أوّلنا لـ ك باعتبارها «<».

إليك مثال آخر يتعلق بصورة تخص اللامتناهي، إنها أقصر لكن يعسر التعرف عليها:

Λسـ Vع Λهـ (ك(سـ، ع) . ∧ ¬ك(سـ، سـ) . ∧ ك(ع، هـ) . ← ك(سـ، هـ))،

إننا نعلم منذ مقالة غودل، سنة 1933، أن أداة التصدير «Λسـ Vع Λهـ» هي أبسط ما يُمكن أن تحصل عليه صيغة شاملة في اللاتناهي.

لا توجد طريقة للبرهنة تامة لإثبات أن صيغا ما هي صيغ في اللاتناهي. وذلك لأنه لو وجدت هذه الطريقة، لأمكن أن نضيفها إلى طريقتنا للبرهنة التامة على الاتساق الخاص بالتناهي، فنحصل على طريقة تامة للبرهنة على الاتساق.

تشكل صيغ اللاتناهي فئة عنيدة تمثل الجزء المشترك باتا بين فئتين عنيدتين:با، فئة كل الصور المتسقة، وتا فئة كل الصيغ غير المتسقة الخاصة بالتناهي (صيغ لا تكون صادقة بالنسبة إلى أي تأويل داخل المجالات المتناهية غير الفارغة). لقد لاحظنا أنه لا وجود لأية طريقة تامة في البرهنة بالنسبة إلى الانتماء إما إلى با أو إلى باتا والشيء نفسه يُمكن أن يقال على تا: وهنا تكمُن نتيجة لبرهنة تراختنبروت (Trachtenbrot) الذي يدّعي عدم وجود أية طريقة تامة للبرهنة على الصحة بالنسبة إلى التناهي.

وعندما نركب هذه المبرهنة مع مبرهنة لوفنهايم-هيلبرت-بيرنايس (الفصل 33)، تؤدي استحالة وجود طريقة تامة في البرهنة بالنسبة إلى با إلى نتيجة أخرى مثيرة هي: مبرهنة غودل على استحالة وجود طريقة تامة في البرهنة بالنسبة إلى النظرية الأولية للأعداد. إذا استطعنا أن نبرهن على كل عبارة صادقة من النظرية الأولية للأعداد، فسنتمكن من أن نبرهن على اتساق كل صورة تسويرية متسقة من خلال إثبات حقيقة من النظرية الأولية للأعداد تزودنا بمثال عن هذه الصورة.

ليس هذا الطريق الذي قاد، تاريخيا، إلى مبرهنة غودل. لقد اعتمدت هنا على استحالة وجود طريقة تامة في البرهنة على الاتساق؛ وقد استنبطتها من مبرهنة تشورش- تورينغ التي تفيد أنه لا وجود لأية طريقة في البتّ بالنسبة إلى الصحة التسويرية. والحال أن برهان مبرهنة تشورش- تورينغ، المهمل هنا، يستعمل الحيلة الأساسية للبرهان الذي قدمه غودل عن مبرهنته الخاصة؛ وقد جاء برهان غودل الأول سنة 1931.

لقد وضعت طريقة غودل كي تثبت، بشكل مباشر، عدم تمام النظرية الأولية للأعداد، عبر تبيان كيف يُمكن لعبارة ما عا من النطرية الأولية للأعداد، متى توفرنا على طريقة في البرهنة طا بالنسبة إلى النظرية الأولية للأعداد، أن تبنى وتصبح صادقة إذا وفقط إذا لم تكن قابلة للبرهنة

بواسطة الطريقة طا. فإما أن عا قابلة للبرهنة في الحالة التي تكذب فيها، وبالتالي لا يوثق بطريقة البرهنة العامة طا، وإما أن عا صادقة وغير قابلة للبرهنة في حال كون طريقة البرهنة طا غير تامة.

تتم صياغة عا من قبل غودل، في خطوطها العريضة كما يلي: من السهل إسناد أعداد صحيحة بكيفية ممنهجة إلى كل السلسلات المتناهية من العلامات، مهما كانت طويلة، لأبجدية معينة. إذا كانت الأبجدية تتضمن بالتحديد تسع علامات، فإننا نستطيع أن نسند إليها الأعداد الصحيحة من 1 إلى 9 ثم نحصل في ما بعد على العدد الصحيح بالنسبة إلى تجميع ما للعلامات بترتيب الأعداد المقابلة في عبارة رقمية طويلة. فإذا كانت الأبجدية تتضمن أكثر من تسع علامات، فمن السهل أن نكيّف هذه الطريقة أو نختار طريقة أخرى. هب أن هذا الترميز قد أنجز من أجل ترميز النظرية الأولية للأعداد. سيكون لكل عبارة من هذا الترميز، من الآن فصاعدًا، وبموجب ما يُسمّى بعدد غودل. بيّن غودل، إذًا، بما أن لدينا طا فمن الممكن أن نصوغ، داخل الترميز النظرية الأولية للأعداد، عبارة مهملة، ولتكن «... سـ...»، التي تصدق على كل عدد سـ إذا وفقط إذا كانت سـ العدد الذي لدى غودل لعبارة قابلة للبرهنة بواسطة طا. وإذا قمنا، الآن باستبدال سـ داخل «ـ(...سـ...)» بالعدد الذي يعيّن عددًا مخصوصًا ن، فمن الواضح أن العبارة الحاصلة صوريًا هي «ـ(...ن...)» ، ستصدق إذا وفقط إذا لم يكن ن الذي اخترناه عدد غودل لعبارة قابلة للبرهنة بواسطة طا. غير أنّ غودل يبيّن أن ن يُمكن اختيارها بحيث يكون عدد غودل لعبارة تكافؤ «ـ(...ن...)» نفسها. وتكون العبارة الناتجة عن هذا الاختيار الماكر لـ ن هو العبارة عا المطلوبة، صادقة إذا وفقط إذا لم يكن ممكنًا البرهنة عليها بواسطة طا[1].

(1) يُمكن أن نجد عرضًا مفصّلاً لحجة غودل، لا في مقالته سنة 1931 فحسب، بل في عرضه لها

إذا كان اهتمامنا بطرائق البرهنة التامة، وبطرائق البتّ مُحَفَّزًا بصدق العبارات، كما هو الحال في النظرية الأولية للأعداد، أكثر مما هو محفز بخصائص الصور، فإن الاختلاف بين هذه وتلك سيختفي في كل الحالات إذا كانت مفرداتنا تشمل النفي. وذلك لأن طريقة البرهنة على صدق العبارات تحمل معها طريقة الإبطال: تبطل العبارة عندما تثبت نفيها. وبواسطة حجة الاعوجاج (zigzag) المنسوبة حديثًا إلى كلين (Kleene)، تضمن طريقة البرهنة التامة على صدق العبارات طريقة البت. غير أن طريقة البرهنة التامة على الصحة، أو على الاتساق، أو عدم اتساق الصيغ تظل أبعد ما تكون عن طريقة البت، ببساطة لأن صورة ما يُمكن أن تكون متسقة دون أن يكون نفيها غير متسق، وقد لا تكون صحيحة دون أن يكون نفيها صحيحًا.

هكذا، وعلى الرغم من كون استحالة وجود طريقة تامة في البرهنة على النظرية الأولية للأعداد يجعلنا نشعر بالصدمة، فإن استحالة وجود طريقة البتّ في النظرية الأولية للأعداد تشعرنا بالشيء نفسه. تكمُن هنا نقطة تثير الفضول تمامًا، لأن استحالة وجود طريقة للبت تظهر أقل إثارة للغرابة من الأولى. على كل حال، نجد أن كثيرًا من المعضلات التي طال عليها الأمد، والتي لم يتم حلها -أذكر من بينها المسألة الشهيرة لفيرما (Fermat) - يُمكن صياغتها بالترميز المعتمد في النظرية الأولية للأعداد، وستجد طريقة في البتّ لهذا المجال مكانة تنبوؤها بوضوح بينها جميعًا.

لقد برهن كل من بريسبورغر (Presberger) وسكوليم أنه إذا كانت النظرية الأولية للأعداد محدودة بحيث لا تحتفظ سوى بالجمع، بعد حذف الضرب، أو العكس بالعكس، فإن النظرية الحاصلة ستتوفر على طريقة في البت. والحدث الأكثر إثارة، هو برهنة تاركسي (Tarski) على أن الجبر الأولي

باللغة الإنجليزية سنة 1934 أيضًا، وكذا في كتاب التركيب المنطقي (*Logical Syntax*) لكارناب خصوصًا ص. 129-134، وفي الفصل السابع من كتابي: (*Mathematical logic*).

للأعداد الحقيقية يتوفر بالكيفية نفسها على طريقة البت. ويعتبر ترميز هذا الجبر الأولي مماثلًا تمامًا لذلك الذي وصفناه أعلاه للنظرية الأولية للأعداد، ويشمل، في الوقت نفسه، الجمع والضرب. ويكمن الفرق الوحيد في أن المتغيرات أصبحت الآن تُؤوّل باعتبارها تحيل على الأعداد الحقيقية بشكل عام بدل الأعداد الطبيعية. وبالرغم من التعقيد الذي يظهر أنه أكبر من موضوعه، فإن الجبر الأولي تام وقابل للبت بصفة آلية، في حين أن النظرية الأولية للأعداد ليست كذلك.

وعليه، إذا كانت معرفتنا بالأعداد تخضع، بسبب النتيجة التي توصل إليها غودل، لتحديدات غير متوقعة، فإن العكس بالضبط يصدق على معرفتنا بهذه المعرفة. تكمُن إحدى بين الأشياء النادرة والأكثر إثارة للغرابة في أن عدم تمام النظرية الأولية للأعداد كان من الممكن أن نعرِفَه بالفعل. لقد أنضجت نتيجة غودل فرعًا جديدًا من النظرية الرياضية، معروف باسم «الرياضيات الفوقية» (Metamathematics) أو نظرية البرهنة التي يتشكل موضوعها من النظرية الرياضية نفسها.

تظل أشياء كثيرة ينبغي اكتشافها في ما يخص حدود النظريات التامة والسمات البنيوية الأساسية التي تميز نظريات من هذا القبيل عن النظريات غير التامة. فعلى القارئ الذي يرغب في تحصيل مفاهيم وتقنيات جوهرية لهذا الحقل الجديد من الدراسات الأساسية في الرياضيات الفوقية أو في نظرية البرهان، أن ينظر ما وراء الحدود التي رسمناها لهذا الكتاب في المنطق. فليراجع تارسكي وآخرون: النظريات الممتنعة عن البتّ (*Undecidable Theories*)، وهيلبرت وبرنايس وكلين وسمولاين (Smullyan) وديفيس (Davis) وروجرس (Rogers) وشونفيلد (Schöenfield).

تمارين

1. هل يُمكن إيجاد طريقة تامة لإبطال النظرية الأولية للأعداد؟ أو طريقة للبت لا ينفلت منها سوى عدد متناه من العبارات المعبَّر عنها بالترميز المعتمد في النظرية الأولية للأعداد؟ علِّل جوابك.
2. كيف تستلزم مبرهنة تراختنبروت أنه لا يُمكن أن توجد طريقة تامة في البرهنة على الانتماء إلى تا؟

35 | الصور القانونية الدّالية

يمثل وضع كل الأسوار الوجودية في المقدمة، كما رأينا، امتيازين ضمن الطريقة الأساسية: يتجلى أقلهما أهمية في أننا نستطيع ببساطة أن ننسى هذه الأسوار، وأهمهما أن طريقة البرهنة تصبح طريقة في البت. وهناك امتياز ثالث يجب أن نذكره مفاده: بما أن الأسوار المتبقية تكون برمتها كلية، فيمكن تعينها معًا بدلًا من أن يتمّ تعيينُها بالتتابع.

والحال أن هناك وسيلة ملتوية للاستفادة من هذا الامتياز الثالث، حتى في الحالة التي لا يُمكن فيها للأسوار الوجودية أن توضع في مقدمة العبارة، وعندما لا يجب أن نأمل في طريقة في البت. وحتى نتمكّن من استيعاب الفكرة الرئيسة، لننظر في «∧س ∨ع ك(س ع)». تقول لنا هذه الصيغة إنه بالنسبة إلى كل موضوع س يوجد موضوع ع، قد يكون مختلفًا بالنسبة إلى خيارات مختلفة لـ س، بحيث «ك(س ع)». وبتعبير عام إنها تثبت وجود دالة، أي طريقة لاختيار بالنسبة إلى كل موضوع س، موضوع تابع ع- بحيث ∧س ك(س س). إن ما نربحه من هذه الصياغة هو أن سورنا الوجودي الجديد الضمني -«توجد دالة»- يأتي قبل «∧س» وليس بعدها، كما كان «∨ ع». بانتقاله على هذا النحو إلى الصدر، قد يظل غير مُعبَّر عنه في براهين على عدم الاتساق.

تلك هي الفكرة التي تقتضي ما أسميه الصورة القانونية الدّالية لصيغة مسوّرة شاملة. نحذف كل الأسوار الوجودية، ثم نلحق بمتغير كل واحد من هذه الأسوار، في كل مواقعها، مؤشرات تسترجع متغيرات كل الأسوار الكلية

التي كانت ذلك السور الوجودي. وهكذا تكون الصورة القانونية الدالية لـ «Λسـ Vعـ ك(سـ عـ)» هي: «Λسـ ك(سـ عـِ)». وستكون الصورة القانونية الدالية لـ:

Vسـ Λعـ Λهـ Vفـ Λغـ Vظ ك(سـ، عـ، هـ، فـ، غـ، ظ)

هي:

Λعـ Λهـ Λظ ك(سـ، عـ، هـ، $\text{ف}_{\text{عه}}$، ظ، $\text{غ}_{\text{عهظ}}$).

لا يتم تفسير هذا الترميز بالحديث عن وجود دوال دون مشكلة، مثلما يحصل عمومًا عندما نرغب في توفير برهان تكافؤ صورة ما مع صورتها القانونية الدالية. لقد سكت تفسيرنا على نقط متباينة من نظرية المجموعات لن أتناولها، أذكر من بينها طبيعة ووجود الدوال، وأدقها شيء ما يعرف باسم مُسلَّمة الاختيار. لاشيء من هذا ضروري لتوضيح صحة وتمام طريقة البرهنة التي سأعرض بلغة الصور القانونية الدالية؛ ستتجلى هذه الخصائص بالأحرى من خلال إلصاق مباشر لهذه الطريقة في البرهنة بالطريقة الأساسية. فلم يتم الحديث عن الدّوال إلا من أجل جعلنا ندرك الترميز.

سنوضح الآن ونتمعن عن قرب في الطريقة المخصصة للبرهنة على عدم الاتساق بواسطة الصور القانونية الدالية. أما تعليلها فسيأتي لاحقًا.

لنعد إلى المقدمات (1)-(3) في الفصل 30. توجد قاعدة لطريقة الصور القانونية الدالية تفيد أنه قبل تحويل المقدمات إلى صيغة قانونية دالّية يجب أن نعيد كتابة متغيرات كل الأسوار الوجودية بحيث نجعلها متمايزة بعضها عن بعض، وكذلك عن المتغيرات التي ظلت مطلقة في أي واحدة من المقدمات. توجد المقدمات (1)-(3) بالفعل مرتبة في هذا الصدد. وعندما نضعها في صيغة قانونية دالية، ثم نشتقّ تعيينات فقط بواسطة ت.ك، نحصل على برهان جديد على عدم الاتساق يكون كالآتي:

<u>مقدمات:</u>

∧ع ك(ظ ع).

∧س ∧ع ⌐ (ك($غ_{س}$ ، ع) . ∧ ك(ع س)).

∧س ∧ع (ك(س ع) ←: ⌐ك(س $ف_{عس}$) . ∧ ك($ف_{عس}$ ، ع) .∨. ك(ع $ف_{عس}$) . ∧ ك($ف_{عس}$ ، س)

<u>تعيينات:</u>

ك(ظ $غ_{ظ}$).

ك(ظ $غ_{ظ}$) ←: ⌐ك(ظ $ف_{ظغظ}$) . ∧ (ك($ف_{ظغظ}$ ، $غ_{ظ}$) .∨. ك($غ_{ظ}$ ، $ف_{ظغظ}$) ∧ ك($ف_{ظغظ}$ ، ظ).

ك(ظ $ف_{ظغظ}$)

⌐(ك($غ_{ظ}$ ، $ف_{ظغظ}$) . ∧ك($ف_{ظغظ}$ ، ظ))

وتُعدُّ هذه التعيينات الأربعة. ومثل التعيينات الأربعة غير المسورة (7) و(10) و(11) و(12) الواردة في الفصل 30، تعيينات غير متسقة من الناحية الصدقية. غير أنّ طريقة الصور القانونية الدالية تتميّز بكون كل التعيينات التي تظهر فيها تكون غير مسوَّرة. إذ تنجم التعيينات مباشرة عن المقدمات بتطبيق متعدد لـ ت.ك. ومن الجدير بالأهمية أن نشير إلى أن المتغيرات الكلية تشكّل موضوع تعيين على مستوى المؤشرات وعلى مستوى غيرها على حد سواء. لم تعد العبارات التي تزودنا بهذه التعيينات متغيرات بسيطة، بل أي عبارات تنتهي إلى ما أسميه مفردات المقدمات. ولنحصل على هذه المفردات نأخذ المقدمات في صورة قانونية دالية، ونحدد، في البداية، المتغيرات المطلقة البسيطة- في الحالة الراهنة «ظ» وحدها. وهي تنتمي إلى المفردات: ثم نتناول أحرف الدّالات، أي تلك التي ترتبط بها المؤشرات مباشرة: ويشكل كل حرف دالة مؤلفا مع عناصر من المفردات المستعملة كمؤشرات، بدوره عنصرًا من المفردات. وهكذا يشمل معجم

المقدمات أعلاه «ظ» و«غط»، و«فطط»، و«غعط»، و«فطعع» و«فططع» و«فع ططع» و«غعطط» وهكذا دواليك. ليس من الضروري بتاتًا، متى تعلق الأمر بإثبات عدم الاتساق، إنتاج تعيينات بشيء آخر غير المفردات. (إذا لم تكن هناك متغيرات مطلقة، نبدأ بالمفردة «س»).

تمثل هذه الطريقة المتبعة في البرهنة على عدم الاتساق توسيعًا لتلك التي قدَّمها سكوليم سنة 1928. يكمُن الاختلاف الأساسي في كون طريقة سكوليم كانت تستخدم فقط للبرهنة على عدم اتساق مقدمة شاملة معزولة بدل تأليف من هذه المقدمات.

لا يكمُن الامتياز الذي تتحلّى به هذه الطريقة فقط في السماح بعدة تطبيقات متزامنة لـ ت.ك، بل هناك امتياز آخر أهَمّ يكمُن، إذا استعرنا لغة متسلقي الجبال، في أن هذه الطريقة تضع حدًّا للحاجة إلى قواعد متطورة. لربما ننتقل باعتماد الطريقة الأساسية من مقدمة «∧س ∧ع ∧هـ ك(س، ع، هـ)» إلى «∨ع ∧هـ ك (غ، ع، هـ)»، ثم إلى «∧هـ ك (غ، ف، هـ)»، وأخيرًا إلى «ك(غ، ف، غ)»، بتسجيلنا وحفاظنا على السطرين الوسيطين، مع إمكانية الرجوع لاحقًا إلى أحد هذه الأسطر الوسيطة، «∧هـ ك(غ، ف، هـ)»، من أجل الحصول على «ك(غ، ف، ف)». في حين ننتقل بواسطة طريقة الصور القانونية الدالية من المقدمة مباشرة إلى «ك(غ، ف، غ)»، ثم ننتقل من جديد مباشرة إلى «ك(غ، ف، ف)» بعمليتين مستقلتين وبحركة واحدة، دون حاجة إلى استعمال نقطة التلاقي «∧هـ ك(غ، ف، هـ)» كرابط. ومن المعلوم أن المقدمة قد أصبحت في الحقيقة، وفق هذه الطريقة، هي «∧س ∧هـ ك(س، عس، هـ)»، وأصبحت النتيجتان النهائيتان «ك(غ، ف، غ)» و«ك(غ، ف، ف)» هما، بتعبير أدق، «ك(غ، عغ، غ)» و«ك(غ، عغ، عغ)».

ولكي نقرن هذه الطريقة بالطريقة الأساسية، لنحولها إلى صورة مبسطة كما سبق أن رأيناها في المرة الأخيرة، أي مع المقدمات المتخلِّصة كليًا من

الأسوار الوجودية الأصلية. ستكون الأسوار الوجودية الوحيدة التي تظهر في المقدمات هي تلك التي تشملها الأسوار الكلية. ولنأخذ الآن الكيفية التي ننتقل فيها، وفق الطريقة الأساسية، من إحدى هذه المقدمات، ولتكن «Λ سـ Vعـ Λهـ ك(سـ، عـ، هـ)» إلى كل تعيين من هذه التعيينات غير المسوّرة. فلماذا لا نستطيع على الإطلاق أن نجري العملية بحركة واحدة؟ ببساطة لأن اختيار المتغيرات بالنسبة إلى التعيينات الوجودية ليس اختيارًا مطلقًا. ففي كل مرة حيث تكون «Λسـ» مجددًا موضوعًا لتعيين ما، من أجل إنتاج سطروسيط جديد، تقتضي الخطوة ت.و التي تليه متغيرًا جديدًا. وبخلاف ذلك، إذا كانت العمليات التي تقود مقدمتين إلى تعيينين غير مسوَّرين تنتج تعيينات متماثلة بالنسبة إلى «Λسـ» لكنها مختلفة في الأخير من حيث «Λهـ»، فإننا نكون أحرارًا في إعطاء تعيينات متماثلة ل «Vعـ» وباعتماد الطريقة المتحجرة الواردة في الفصل 32، سنكون مضطرين إلى ذلك. تواجه الطريقة الأساسية هذا الإكراه، كما رأينا، بإثبات قاعدة متقدمة أو موقع للربط مثل «Λهـ ك(غـ، فـ، هـ)»، انطلاقًا منها ننتقل تارة إلى «ك(غـ، فـ، غـ)» وتارة إلى «ك(غـ، فـ، فـ)». وفي المقابل يتطلب تعيين التعيين، تسجيل العمليات بكيفة آلية، إذ يحسب بطريقة تسمح لتعيينين غير مسوّرين لـ «Λسـ V عـ Λ هـ ك(سـ، عـ، هـ)» بحيازة متغيرات ما مكان «سـ» و«هـ»، ولكن بطريقة تجعلها تتفق أو تختلف بخصوص المتغير «عـ» بحسب ما إذا كانت تتفق أو تختلف بخصوص المتغير «سـ». (أصوغ الأمور بقوة لأنني أكره الطريقة المتحجرة). تزودنا الصورة القانونية الدالية بحيلة تحقيق التوافق: ينتج «متغير» وجودي مركب، أي «عـ» آليًا نتائج مماثلة لتعيينات مماثلة للسور الأول «Λ سـ»، ومختلفة عن تعيينات مختلفة لـ «Λسـ» نفسه.

ذلك إذًا ودون أن يتعلق الأمر بالدوال، دور المؤشرات المقترنة بالمتغيرات الوجودية. من الواضح، رغم خصوصية المثال السابق، أن طريقة الصور

القانونية الدالية ليست سوى طريقة سريعة للقيام بالعمل الذي تنجزه على أحسن وجه الطريقة الأساسية في إطار الطريقة المتحجرة.

وهناك ضرب من طريقة الصور القانونية الدالية يعود إلى دربن (Dreben) لا يتوقف على الصيغة الشاملة. فالصيغ لا تتطلب سوى إعدادًا قليلًا. إذ ينبغي ترجمة الشرط والتشارط إلى الفصل، والوصل والنفي إذا كانت مكوناتها تتضمن أسوارًا، وليس في حالة العكس. كما ينبغي أن ندفع علامات النفي نحو الداخل بواسطة قوانين دي مورغان وقواعد تحريك النفي ((9) و(10) من الفصل 23)، ولكن فقط إلى حين لا يظهر فيه أي سور على الإطلاق في صورة منفية. باختصار شديد، من المطلوب أن تكون الأسوار محكومة بوصليات، وفصليات وأسوار فقط. نضيف إلى ذلك، كما في الصيغة السابقة للطريقة القانونية الدالية، يجب أن تُعدّل متغيرات الأسوار الوجودية كي تصبح متميزة عن المتغيرات المطلقة وعن بعضها.

هكذا، لنفرض أننا نرغب في إثبات عدم اتساق المقدمات التالية:

(1) V سـ Λ ع ك(سـ، ع)،

(2) ⌐ Λ سـ Λ هـ V ع (ك(هـ، ع) . Λ ك(ع، سـ))،

(3) Λ سـ Λ ع [ك(سـ، ع) ←. Λ هـ (ك(هـ، ع) ← ك(سـ، هـ)) ← V هـ (ك(ع، هـ) . Λ ك(هـ، سـ))].

ونقوم بإعداد (2) بدفع علامة النفي، بواسطة قواعد التحريك، نحو الداخل:

Λ سـ V هـ Λ ع ⌐(ك(هـ، ع) . Λ ك(ع، سـ)).

ثم نقوم بإعداد (3) بترجمة الشرطين اللذين لا يظهران بين قوسين وبدفع علامة النفي الناتجة نحو الداخل:

Λ سـ Λ ع [⌐ك(سـ، ع) V V هـ ⌐(ك(هـ، ع) ← ك(سـ، هـ)) V V هـ (ك(ع، هـ) . Λ ك(هـ، سـ))].

وأخيرًا، نقوم بإعداد (1)-(3) عبر تنويع أحرف الأسوار الوجودية. وبغية المزيد من الإيضاح، أدفع هذا التعديل للأحرف إلى أبعد مما تقتضيه الضرورة.

Vظ Λع ك(ظ، ع)،

Λس Vغ Λع ¬(ك(غ، ع). ∧ ك(ع، س))،

Λس Λع [¬ك(س، ع) ∨ Vف ¬(ك(ف، ع) ← ك(س، ف)) ∨ V ط
(ك(ع، ط) . ∧ ك(ط، س))].

قد يكون القارئ قد تعرف، مسبقًا، على تكافؤ هذه الصيغ والمقدمات (1)-(3) من الفصل 30، والتي استعملناها في هذا الفصل مجددًا من أجل توضيح الطريقة الأولى للصور القانونية الدالية. ولكن لنواصل مع طريقتنا الجديدة. نقوم، كما سبق وفعلنا، ببناء الصور القانونية الدالية:

(4) Λع ك(ظ، ع)،

(5) Λس Λع ¬(ك(غ$_{\text{ع}}$، ع. ∧ ك(ع، س)).

(6) Λس Λع [¬ك(س، ع) ∨ ¬(ك(ف$_{\text{سع}}$، ع) ← ك(س، ف$_{\text{سع}}$) ∨. ك(ع، ط$_{\text{سع}}$) . ∧ ك(ط$_{\text{سع}}$، س)].

تتضمن المفردات، هذه المرة، «ظ»، «غ$_{\text{ظ}}$»، «ف$_{\text{ظظ}}$»، «ط$_{\text{ظظ}}$»، «غ$_{\text{غظ}}$»، وهكذا دواليك. فتكون تعيينات غير متسقة مستعدة للظهور.

ويخلِّف اجتناب الصيغة الشاملة أثرًا في قاعدة بناء الصور القانونية الدالية، برغم أن المثال السابق لم يبرز ذلك. ويجب أن تستحضر المؤشرات المقترنة بالمتغير الوجودي فقط متغيرات الأسوار الكلية التي يقع في مداها السور الوجودي. ومع ذلك، ليس من الضروري أن نأخذ بعين الاعتبار، إذا لم تكن الصيغة شاملة، جميع الأسوار الكلية السابقة. وهكذا فإن الصيغة:

(7) Λس Λع ك(س، ع) . ∧ Λهـ Vف ل(هـ، ف)

لها الصورة القانونية الدالية «Λسـك(سـ $ع_{س}$) . Λ Λهـل(هـ $ف_{هـ}$)»، فوجود «Λسـ» في أقصى اليسار لا يفرض أن نربط المؤشر «سـ» بـ «فـ»، لأن هذا الحرف الأخير لم يعد تحت مدى «Λسـ».

فلو قمنا، أولًا، بتحويل (7) إلى صيغة شاملة بحيث نطبق عليها الطريقة السالفة للصور القانونية الدالية، لاضطررنا أن نبتّ في هذه العبارة أو تلك من العبارتين الآتيتين:

Λسـ Vعـ Λهـ Vفـ (ك(سـ عـ) . Λ ل(هـ فـ))،

Λهـ Vفـ Λسـ Vعـ (ك(سـ عـ) . Λ ل(هـ فـ))،

دون أن نتكلم عن الاختيار الأقل حكمة، من قبيل:

Λسـ Λهـ Vعـ Vفـ (ك(سـ عـ) . Λ ل(هـ فـ)).

وهذا يعني إذًا الختم إما بهذه الصيغة أو تلك من الصور القانونية الدالية:

Λسـ Λهـ (ك(سـ $ع_{س}$) . Λ ل(هـ $ف_{س هـ}$))،

Λهـ Λسـ (ك(سـ $ع_{س هـ}$) . Λ ل(هـ $ف_{هـ}$)).

ففي كلتا الحالتين نحصل على مؤشر مزدوج، وهو ما لم يحصل عندما كنا ننطلق مباشرة من (7) بطريقة دربن. تبرز ذلك ميزة جديدة لطريقة دربن بالإضافة إلى إعفائنا من المرور عبر الصيغ الشاملة: تنتهي أحيانًا بمؤشرات أبسط، وتسهّل في الوقت نفسه البحث المحتمل عن تعيينات غير متسقة.

سنتغاضى هنا عن تعليل هذه الطريقة.

تمارين

1. جِد تعيينات غير متسقة لـ (4)-(6).
2. عالج مجددًا الأمثلة والتمارين الواردة في الفصلين 29 و31 بواسطة طريقة الصور القانونية الدالية.

36 | طريقة هيربراند

كانت غاية الطريقة الأساسية وطرائق الصور القانونية الدالية هي إثبات عدم الاتساق. والحال أن الصحة هي صدق كل التأويلات، كما أن عدم الاتساق هو كذب كل التأويلات. وهكذا تقترن الصحة بعدم الاتساق مثلما يقترن الصدق بالكذب، أي بالتقابل (انظر الفصل 12). بيد أن العلاقة نفسها تربط الفصل بالوصل، والتسوير الوجودي بالتسوير الكلي. إذ يُمكن لكل طريقة من الطرائق المتعلقة بعدم الاتساق أن تنعكس، بواسطة التقابل، إلى طريقة تتعلق بالصحة. وعليه للنظر مجددًا في الطريقة الأساسية. سنجد أن التحويلات الصورية تتعرض لتغيير طفيف. وهكذا يتبادل ت.ك وت.و الأدوار: على الأقل، لأنهما معًا كانا حاضرين، ويظلان حاضرين، وهذا يعني فقط أننا ننقل إلى ت.ك مطلبا مفاده أن يكون متغير التعيين جديدًا. غير أن الهدف، في حد ذاته، يتغير جذريًا: فما سنفرضه منذ الآن على تراكم التعيينات غير المسوّرة لم يعد هو كون وصلها غير متسق صدقيًا، بل أن يكون فصلها صحيحًا صدقيًا. علاوة على ذلك، لن نبرهن، عند بلوغ هذا الهدف، أن الوصل بين المقدمات كان غير متسق، بل إن فصلها كان صحيحًا.

بداية، لننظر في برهنة مبتذلة على عدم الاتساق بواسطة الطريقة الأساسية. يمثل السطران الأولان مقدمتين والأربعة الباقية تعيينات.

Vسـ Λعـ ك(سـ عـ).

Vعـ Λسـ ¬ك(سـ عـ).

Λع ك(هـ ع)،

Λسـ ⌐ك(سـ ف)،

ك(هـ ف)،

⌐ك(هـ ف).

وتثبت هذه النتيجة عدم اتساق الوصل:

Vسـ Λع ك(سـ ع) . Λ Vع Λسـ ⌐ك(سـ ع).

و الآن، تحوز صحة الفصل:

Λسـ Vع ك(سـ ع) V Λع Vسـ ⌐ك(سـ ع)

البرهان التالي، المقابل لبرهان عدم الاتساق السابق:

Λسـ Vع ك(سـ ع)

Λع Vسـ ⌐ك(سـ ع)

Vع ك(هـ ع)

Vسـ ⌐ك(سـ ف)

ك(هـ ف)

⌐ك(هـ ف)

إنها صحة الفصل «ك(هـ ف) V ⌐ك(هـ ف)» للتعيينين الأخيرين، وليس عدم اتساق وصلهما، هي التي تضمن صحة الفصل الذي يربط بين الصيغتين الأوليين.

قد يظن البعض أن هذا البرهان الأخير مزدوجًا، يقيم برهانًا على عدم اتساق الوصل بين السطرين العُلْوِيين بواسطة الطريقة الأساسية. سيكون ذلك خطأً: فالخطوة الأخيرة لـ ت.و تخرق فعلًا الطريقة الموضوعة لعدم الاتساق عندما نعيد استعمال متغير تعيين قديم هو «هـ». بالإضافة إلى ذلك، إن الصيغ العليا متسقة فعلًا: يكفي أن نؤوّل «ك(سـ ع)» بـ «سـ = ع» حتى يصبحا معًا صادقين.

ومن منظور اللزوم، تتبع براهين عدم الاتساق وبراهين الصحة طرقًا متعارضة. ففي براهين عدم الاتساق يتخذ اللزوم منحًى نازلًا. فقد كان لـ ت.ك قوة اللزوم، بخلاف ت.و وذلك ما عقَّد صحة الاستدلال. وفي براهين الصحة، يتخذ اللزوم منحًى تصاعديًّا. حيث يكون لـ ت.و قوة اللزوم، ولكن نحو الأعلى. مَردُّ ذلك أن المرحلة الأخيرة في إثبات الصحة أعلاه ليست فاسدة، رغم استعادة «هـ» من جديد، يكمُن ببساطة في أن «~ك(هـ، فـ)» تستلزم «Vسـ ~ك(سـ، فـ)». فلو كان يتوجب أن نثبت صحة هذه الطريقة في البرهنة على الصحة بدورها- وهو ما نستطيع القيام به عندما نناقش صحة برهان الطريقة الأساسية كما وردت في الفصل 30، التقابل من أجل التقابل- سنكتشف أن ما يعقد هذا الاستدلال يكمُن حاليًا في كون ت.ك الخاص بهذه الطريقة ليس له قوة اللزوم نحو الأعلى. وعليه ينبغي، منذ الآن، أن يقع ثقل إكراه المتغيرات الجديدة على ت.ك وليس على ت.و حتى يُمكن للتعليل أن يتم.

وحتى نقدم مثالًا عينيًا، لنصغ تقابل برهان عدم الاتساق (1)-(12) من الفصل 30. لكي نكتب بسهولة هذا التقابل، لنعتبر «←» في هذا البرهان باعتباره «V» مع المقدم المنفي. ستسمَّى مقابلات المقدمات القديمة «قضايا فصلية»، بما أن الأمر يتعلق بصيغ يجب أن يبرهن على صحة فصلها:

<u>قضايا فصلية:</u>

(1) Λظ Vعـ ك(ظ، ع).

(2) Vسـ Λغـ Vعـ ~(ك(غ، ع) V ك(عـ، سـ)).

(3) Vسـ Vعـ Λفـ (~ك(سـ، ع) . Λ ~ك(سـ، فـ) V ك(فـ، ع) . Λ ك(ع، فـ) V ك(فـ، سـ))

<u>تعيينات:</u>

(4) Vعـ ك(هـ، ع) [لـ (1)]

(5) ∧غ∨ع ~(ك(غ، ع) ∨ ك(ع، هـ)) [ل (2)]

(6) ∨ع ~ (ك(ط، ع) ∨ ك(ع، هـ)) [ل (5)]

(7) ك(هـ، ط) [ل (4)]

(8) ∨ع ∧ف (~ك(هـ، ع) . ∧ ~ك(هـ، ف) ∨ ك(ف، ع) . ∧ ك(ع، ف) ∨ ك(ف، هـ)) [ل (3)]

(9) ∧ف (~ك(هـ، ط) . ∧ ~ك(هـ، ف) ∨ ك(ف، ط) . ∧ (ك(ط، ف) ∨ ك(ف، هـ)) [ل (8)]

(10) ~ ك(هـ، ط) . ∧ ~ك(هـ، ض) ∨ ك(ض، ط) . ∧ ك(ط، ض) ∨ ك(ض، هـ)) [ل (9)]

(11) ك(هـ، ض) [ل (4)]

(12) ~(ك(ط، ض) ∨ ك(ض، هـ)) [ل (6)]

نجد بواسطة التحليل الصدقي أن فصل (7) و(10) و(11) و(12) صحيح، وتدل هذه النتيجة على أن فصل (1) و(2) و(3) صحيح.

وبوضع الطرائق الحالية جانبًا، نجد البراهين على الصحة مفضلة حدسيًّا على براهين عدم الاتساق. فالحقيقة طريدتنا، والمطاردة المباشرة شيء أكثر وضوحًا من استعمال الشباك أو الفخاخ. ومع ذلك، نرى من خلال الأمثلة السابقة أن البراهين على عدم الاتساق تتم بشكل طبيعي داخل الطريقة الأساسية أكثر من البراهين على الصحة داخل الطريقة الحالية. ولهذا الأمر سببان. يكمُن السبب الأول في كون اللزوم النازل، الذي تكون فيه الصيغة المُستلزِمة معطاة والصورة المُستلزَمة هي ما نبحث عنه، ينتج ببساطة أكثر عن مقابله. وأما السبب الثاني، فيكمُن في كوننا نجد من الطبيعي قراءة تراكم من التعيينات باعتباره وصلًا أكثر من قراءته فصلًا.

يمكن أن يعوض هذا الاختلاف الذي يعتري طبيعة الطريقتين بواسطة تدقيق الترميز. إذ نستطيع عكس مجرى براهين الصحة، وجعل المفصولات

بذلك ظاهرة، على طريقة الإحراج (dilemma).

ك(هـ فـ) ∨ ¬ك(هـ، فـ)

∨ع ك(هـ ع) ∨ ∨سـ ¬ك(سـ فـ)

∧سـ ∨ع ك(سـ ع) ∨ ∧ع ∨سـ ¬ك(سـ ع)

إن مثل هذه الطريقة طبيعية بالتأكيد. إذ نكتب في البداية، صيغة غير مسوّرة تكون، صحيحة صدقيًا بشكل صريح، ثم نشتق أسطرًا جديدة عبر الاشتغال على جمل الفصل. وبما أن البرهان يتم تراجعيًا، فإن هذه العمليات هي عكس ت.ك وت.و، ويمكن أن نسميها، إذًا، التعميم الكلي والتعميم الوجودي، باختصار ع.ك وع.و. نبدل إنتاج تعيينات انطلاقًا من أسطرها المولّدة (الفصل 30)، تقودنا من التعيينات إلى أسطرها المولّدة. وبكيفية أكثر تخصيصًا، إن ع.ك وع.و جملتان، لأن فعلها يمارس على جمل الفصليات الجديدة وليس فقط على الأسطر الجديدة معتبرة في كليتها.

فلنحاول القيام بقلب وتحويل من هذا النوع على البرهان (1)-(12). سيكون سطرنا الأعلى هذه المرة هو الفصل الصحيح لكل من (7) و(10) و(11) و(12). أما السطر الموالي فسيُشكِّل بالأحرى من فصل (4) و(10) و(4) و(6). هكذا تفسح هنا الجمل (7) و(11) و(12) من السطر الأول الطريق أمام أسطرها الوجودية المولّدة. نحذف إذًا الورود الثاني لـ (4). سيكون السطر الثالث فصلًا لـ (4) و(9) و(6)؛ وبذلك الجملة (10) من السطر الثاني الطريق أمام سطرها الكلي المولّد (9). سيكون السطر الرابع هو فصل (4) و(8) و(6)؛ وسيكون الخامس فصلًا لـ (4) و(3) و(5)؛ وسيكون السطر الأخير فصلًا لـ (1) و(3) و(2). وتلك هي العبارة الفصلية التي ينبغي إثبات صحتها. ننصح القارئ بأن يبلور بوضوح هذه البرهنة في صيغ تامة باستعمال ورقة كبيرة. (*)

نبدأ هذه العملية من سطر صحيح صدقيًا تُشتقُّ منه بالتدريج أسطر

جديدة صحيحة بواسطة ع.ك الجملية، وع.و الجملية، فضلًا، كما رأينا، عن عملية مبتذلة ثالثة: حذف الجمل المكرَّرة. وهذه العملية تقوم بما كان يقوم به، قبل العكس، استعمال السطر نفسه كمصدر لتعيينات كثيرة. يعود تغيير الأسلوب إلى كوننا قد جمعنا التعيينات في عبارة فصلية.

تعود هذه الطريقة في البرهنة التي قادتنا إليها هذه الترتيبات الجديدة إلى هيربراند. وهي تترجم أسلوبًا أكسيوميًّا شبيهًا بما رأيناه في الفصل 13. إن عدد صيغنا للمسلَّمات، بخلاف غيرها، الآن غير متناه: كل الصيغ الصحيحة صدقيًّا مقبولة. فلا صعوبة في هذا، إذ بإمكاننا معالجة ما لا نهاية له من المسلَّمات طالما أننا نعرف ما إذا كانت صيغة ما عبارة عن مُسلَّمة، وهو ما تسمح به التحليلات الصدقية. أما في ما يخص قواعد الاستدلال التي نعتمدها، فعددها في الوقت الراهن ثلاثة: لم يعد قانون الوضع والإنابة، بل بالأحرى، التعميم الكلي الجملي، والتعميم الوجودي الجملي، وحذف المكرّرات.

إن البرهانين اللذين وضّحنا بواسطتهما طريقة هيربراند قد تم تكثيفهما بلا ضرورة عبر تعميمات أجريت، في الآن نفسه، على الجمل المرتّبة. وستكون البنية الأكسيوميّة للطريقة أكثر شفافيةً متى تقدمنا خطوة واحدة كل مرة. فالبرهنة على العبارة:

⋀سـ ⋁ع ك(سـ، ع) ∨ ⋀ع ⋁سـ ¬ك(سـ، ع).

التي تم عرضها أعلاه في ثلاثة أسطر، سيكون لها عندئذ بالأحرى الصيغة التالية:

ك(هـ، ف) ∨ ¬ك(هـ، ف)

⋁ع ك(هـ، ع) ∨ ¬ك(هـ، ف)

⋁ع ك(هـ، ع) ∨ ⋁سـ ¬ك(سـ، ف)

⋀سـ ⋁ع ك(سـ، ع) ∨ ⋁سـ ¬ك(سـ، ف)

⋀سـ ⋁ع ك(سـ، ع) ∨ ⋀ع ⋁سـ ¬ك(سـ، ع)

وينتج كل سطر عن سابقه بتطبيق ع.ك أو ع.و الجملتين. وسيكون من المفيد للقارئ كتابة برهان الفصل المكوَّن من (1) و(2) و(3)، مع تبني هذا التدرج خطوة خطوة. يلزم في المجموع أحد عشر سطرًا كبيرًا، ابتداء من المُسلَّمة الصحيحة صدقيًا والمكوَّنة من (7) و(10) و(11) و(12). ينتج كل سطر جديد عن سابقه بواسطة ع.ك أو ع.و أو - في حالة واحدة- بحذف متكرر. (†)

لنضع بشكل ظاهر قاعدة ع.ك الجملية، ولهذا الغرض نعود إلى قاعدة ت.ك التي تقلبها، أي إلى ت.ك في الصيغة الملائمة لنمط براهين الصحة التي استهل بها هذا الفصل. لقد كانت خاضعة إذًا لمطلب مفاده أن يكون متغير التعيين جديدًا، أي ألّا يكون مطلقًا في أي موقع في السابق. والآن وقد أصبح البرهان مقلوبًا، يترك مطلب الجدة هذا مكانه لمطلب التقادم: لا يجب لمتغير التعيين أن يبقى مُطلقًا في أي مكان من السطر المُشتَق.

والحقيقة أنه ما دُمنا نربط من الآن فصاعدًا الأسطر القصيرة السابقة في أسطر طويلة بواسطة الفصل، فلا ينبغي أن يكون لمتغير التعيين ولو موقعًا مطلقًا في الجمل الأخرى للفصل داخل سطره الخاص. ومع ذلك، يظهر أن هذا الشرط، أي يكون المتغير في جملة مرتبة، يكون مضمونًا فعلًا بموجب شرط ألّا يكون مطلقًا في السطر المُشتَق. (سيكون مضمونًا ما دُمنا نتوفّر على براهين ظاهرة عبر التدرج خطوة واحدة في كل مرة). وذلك لأنه عند افتراض أن المتغير كان مطلقًا في جملة مرتبة، سيكون مطلقًا أيضًا في السطر الموالي، لأن هذه الجمل تنزل أيضًا.

ترتد القاعدة ع.ك الجملية، المصوغة بشكل مباشر، إذًا، إلى ما يلي: **إذا كان سطر ما عبارة فصلية مكونة من جملة واحدة أو عدة جمل، استبدل أي واحدة منها بتسوير كلي يكون تعيينًا لها، شريطة فقط ألّا يكون متغير التعيين مطلقًا في السطر المشتَق على هذا النحو.** وينبغي أن

نشير جيدًا إلى أن الجمل المعنية هي جمل الفصل، وجمل الفصل وحدها.

ولربما نأمل أن يكون متغير التعيين، بواسطة التناظر مع المطلب الأصلي، جديدًا. وسيكون من الأحسن أن نشترط الآن ألّا يكون مطلقًا في أي مكان من سطر مقبل. الحقيقة أن هذا الاحتياط لا فائدة منه، على الأقل ما دام أن المتغير ليس مُطلقًا في السطر المشتَق مباشرة. وذلك لأن قواعدنا الاستدلالية الثلاثة لا تسمح بتاتًا بإدخال متغير مطلق، أو بجعل متغير ما مطلقًا.

إن القاعدة ع.و الجملية أكثر بساطة: إذا كان سطرٌ ما فصلًا مُكوّنًا من جملة واحدة أو من عدّة جُمل، استبدل أيًا كان منها بتسوير وجودي يكون تعيينًا فيها. فلا قيد يؤثر هنا على متغير التعيين، مثلما لم يؤثر على أي متغير من تلك التي كانت تستعملها ت.و في نمط البراهين على الصحة المعروضة في بداية هذا الفصل.

إن ما نبتغيه من قاعدة الاستدلال في نسق أكسيومي للصيغ الصحيحة ليس هو أن يكون لزوميًا، بل القيام بنقل الصحة لا غير: ألا تقود انطلاقًا من صيغ صحيحة سوى إلى صيغ صحيحة. وأما قوة اللزوم فطريقة في استيفاء هذا المطلب: فالصيغ التي تستلزمها صور صحيحة تكون بالتأكيد صحيحة. بيد أن قاعدة الاستدلال يُمكن أن تنقل الصحة دون أن تكون لها قوة اللزوم، والإنابة مثال على ذلك، إذ ليس لها قوة اللزوم: نحصل من «ب ٧ جـ٨ د» بالإنابة على «جـ ٧ ـد ٨ ضـ» لكنها لا تستلزمها. يكمُن الأهم فقط في أننا عندما ننطلق من صورة صحيحة، مثلًا «ب ٧ ـب ٧ جـ»، تعطينا الإنابة صيغًا صحيحة فقط.

كانت أنساق الفصل 13 تتضمن قاعدة استدلال لها قوة اللزوم، أي قاعدة الوضع بالوضع، وتضمنت قاعدة أخرى لا تتوفر على هذه القوة هي الإنابة. ويشمل نسق المسلّمات الذي توصلنا إليه توًا، من جهة، قاعدتين للاستدلال لهما قوة لزومية وقاعدة ليست لها. والظاهر أن قاعدة حذف المكرّرات لها

قوة لزومية، وكذلك القاعدة ع.و الجملية. تستلزم الجملة التي تمثل التعيين، وهذه نقطة أولى. تعميمها: حيث «ك(ع)» تستلزم «∨سـ ك(سـ)»، ومن جهة أخرى، إذا كانت جملة با تستلزم جملة جا، فإن فصل با ومعطى آخر أيًّا كان خا يستلزم فصل جا وخا؛ وهذا بديهي من الناحية الصدقية.

ليس لقاعدة ع.ك الجملية قوة لزومية، لكنها تنقل الصحة. محصول القول، وهنا يكمُن بالفعل الأثر الذي اعتدنا عليه منذ الفصل 25، تكون التسويرات الكلية للصور الصحيحة، صحيحة. هناك اعتبارات أخرى هي تغيير الأحرف وقاعدة تحرك الأسوار (4) في الفصل 23. فلنستخرج بوضوح هذه الاعتبارات المختلفة.

إذا طبقنا على صيغة صحيحة سورًا كليًّا يتحكم في السطر بأكمله، فإن النتيجة ستكون من جديد صحيحة: وهذا هي الحقيقة التي اعتدنا عليها منذ الفصل 25. إن قاعدتنا الحالية ع.ك قاعدة جملية فقط: لكنها تثير على الأقل ظهور سطرٍ مكافئ للسطر الذي كان من الممكن أن نحصل عليه لو سَوَّرنا الصيغة برمتها: وهذا ما نراه حسب قاعدة تحريك الأسوار (4) في الفصل 23. وعليه، لنعد إلى برهنتنا الأخيرة على الصحة في خمسة أسطر. ينتج السطر الرابع عن الثالث بواسطة القاعدة ع.ك الجملية. يتجلى الاستدلال الذي يتضمن نقل الصحة في أننا، عندما نجد السطر الثالث صحيحًا، نعلم أن تسويره:

∧ هـ (∨عـ ك(هـ عـ) ∨ ∨سـ ¬ك(سـ فـ))

صحيح؛ وترتد هذه الصيغة، بواسطة قاعدة تحرك الأسوار، إلى:

∧ هـ ∨عـ ك(هـ عـ) ∨ ∨سـ ¬ك(سـ فـ)،

المماثلة لسطرنا الرابع، ما عدا في ما يخص تغيير حرف لا أهمية له. ويتم تطبيق قاعدة ع.ك الجملية التي ننتقل بها من السطر الرابع إلى السطر الأخير بواسطة التحليل نفسه.

يتطلب اعتماد قاعدة تحرك الأسوار ألّا يكون المتغير الذي نُعمِّم مطلقًا في جمل أخرى للفصل. غير أن ما يضمن لنا هذا، كما رأينا، بكيفية غير مباشرة هو الاشتراط المتعلق بمتغيرات التعيين، والذي أدمجناه في صياغتنا لقاعدة ع.ك الجملية.

والآن ماذا عن تغيير الحرف غير ذي أهمية الذي ذكرنا أعلاه؟ تسمح قاعدة ع.ك الجملية بذلك؛ ولكن كيف تحيِّد صياغة القاعدة ع.ك الجملية هذا التغيير؟ سيعطي تغيير «هـ» في «∧هـ ل(هـ، ف)» إلى «ف»، مثلًا، «∧ف ل(ف، ف)»، ومِن ثَمَّ سيغير ليس الترميز فحسب، بل بنية الصيغة. والحال أن هذا لا يُمكن أن يحدث للسبب التالي: فما نمثله في تحليلنا الحالي لقاعدة ع.ك الجملية كخطوة تقوم، أولًا، بالتعميم عندما ننتقل من «ل(هـ، ف)» إلى «∧ هـ ل(هـ، ف)»، ثم تغير (بشكل غير صحيح) حرفًا كي تصل إلى «∧ف ل(ف، ف)»، يجب أن يعتبر، بالأولى، من منظور ع.ك الجملية كخطوة فريدة تحول الجملة «ل(هـ، ف)» إلى «∧ف ل(ف، ف)». وهذه الخطوة تخرق قاعدة ع.ك الجملية لأن «ل(هـ، ف)» ببساطة ليست تعيينًا لـ «∧ف ل(ف، ف)». الحقّ أنّ «ل(ف، ف)» تعيين لـ «∧هـ ل(هـ، ف)»؛ في حين أن «ل(هـ، ف)» ليست تعيينا لـ «∧ ف ل(ف، ف)».

ألا نستطيع عندئذ استعمال قاعدة ع.ك الجملية لتعويض «ل(ف، ف)» في موضع ما بـ «∧هـ ل(هـ، ف)»؟ لا، ولا غير ذلك، وذلك لسبب مختلف. سيظل متغير التعيين، وهو هنا «ف»، مطلقًا بالفعل في المكوِّن «∧هـ ل(هـ، ف)» من السطر المشتق، مع خرق الاشتراط المتعلق بمتغيرات التعيين في ملفوظ القاعدة ع.ك الجملية.

لقد حصلنا، في بداية هذا الفصل، على طريقة للبرهنة على الصحة انطلاقًا من طريقتنا الأساسية الخاصة بعدم الاتساق، وذلك بفضل اعتبارات التقابل. ويمكن البرهنة على صحتها بواسطة تدليل مقابل للتدليل

على صحة الطريقة الأساسية. وبعد هذا كله أعطينا لهذه الطريقة المتعلقة بالصحة صيغة أكسيومية، وتحديدًا طريقة هيربراند، عبر قلبها وإعادة كتابتها بروابط الفصل. وأخيرًا، ومن أجل اتخاذ الاحتياط اللازم، نظرنا في برهان مباشر على صحة الطريقة المصوغة على هذا النحو. فمثلما كانت مهمة الطريقة الأساسية تكمُن في البرهنة على عدم اتساق وصل مكون من صيغة أو عدة صيغ شاملة، فإن مهمة هذه الطريقة تكمُن في البرهنة على صحة فصل مكوَّن من صيغ أو عدة صيغ شاملة.

ولتبسيط صياغة وتعليل هذه الطريقة، تبنيت، في بعض الصفحات السابقة، أسلوبًا في البرهنة يتدرج خطوة تلو الأخرى. يُلزمنا أن نبذل جهدًا نافلًا عمليًّا، يكمُن في إعادة كتابة كل سطر برمته بالنسبة إلى كل تغيير لإحدى جمله. وعند التطبيق سنعود بالتأكيد إلى أسلوبنا المكثف الوسيط، وذلك بالاشتغال على الجمل المتجاورة.

يظهر جيدًا، حتى على هذا النحو، أن البراهين على عدم الاتساق تظل أسرع وأسهل، برغم الشذوذ الظاهر للهدف المطلوب. من الممكن أن نترك فيها المقدمات القصيرة والعديدة، ونقوم بالشيء نفسه بالنسبة إلى التعيينات، ثم ننظر في هذه الأخيرة من حيث تركيبها دون أن نتعب مخيلتنا، لسبب وحيد يكمُن في أن التركيب هنا وصليٌ وليس فصليًّا.

تمارين

1. انظر إلى (*) وإلى (†) استعمل ورقتك من ناحية العرض لتتمكن من كتابة الأسطر الطويلة.
2. عالج الأمثلة والتمارين ابتداءً من الفصل 29 بطريقة هيربراند. كيف يُمكن اعتبار هذه الطريقة توسيعًا مباشرًا للطريقة الواردة في الفصل 29؟

37 طرائق أخرى للبتّ في الصحة

لقد رأينا كيف ننتقل بواسطة التقابل من الطريقة الأساسية إلى طريقة البتّ في الصحة، ومنها إلى طريقة هيربراند عبر قلب الأدلة وتأليف أسطرها بواسطة الفصل. ويمكن إنجاز تحويلات مماثلة وَفقًا لطريقة الصور القانونية الدالية (الفصل 35).

فلنقتصر في البداية على مقابل هذه الطريقة: تبادُل أدوار الأسوار الكلية والوجودية. وعندما نركب الصور القانونية الدّالية بالنسبة إلى براهين الصحة، نحذف الأسوار الكلية بدل الأسوار الوجودية؛ ونربط المؤشرات بمتغيراتها فنعلِّم متغيرات الأسوار الوجودية السابقة. على سبيل المقدمات لدينا الآن قضايا فصلية، وسنثبت أن فصلها صحيح بإنتاج تعيينات تسويرات وجودية بواسطة المفردات إلى حين أن تجتمع التعيينات التي يكون فصلها صحيحًا صدقيًا.

بإمكاننا أن نوضح هذه الطريقة عندما نبرهن، مرة أخرى، على صحة فصل الصيغ (1)-(3) من الفصل السابق. وليس البرهان سوى مقابل لبرهان عدم الاتساق الذي تناولناه في مستهل الفصل 35، ويبدأ بصور قانونية دالية جديدة.

قضايا فصلية:

(1) Vعـك(ظـ ع)

(2) Vسـ Vعـ ~(ك(غ ـِ ع) V ك(عـ سـ))

(3) Vسـ Vعـ (~ك(سـ، ع) . ∧ ~ك(سـ فـ$_{\text{سء}}$) V ك(فـ$_{\text{سء}}$، ع) . ∧ ك(ع، فـ$_{\text{سء}}$) V ك(فـ$_{\text{سء}}$، سـ)).

<u>تعيينات:</u>

(4) ك(ظ، غـ$_{\text{ظ}}$)

(5) ~ك(ظ، غـ$_{\text{ظ}}$) . ∧ ~ك(ظ فـ$_{\text{ظغظ}}$) V ك(فـ$_{\text{ظغظ}}$، غـ$_{\text{ظ}}$) . ∧ ك (غـ$_{\text{ظ}}$، فـ$_{\text{ظغظ}}$) V ك(فـ$_{\text{ظغظ}}$، ظ)

(6) ك(ظ، فـ$_{\text{ظغظ}}$)

(7) ~((ك غـ$_{\text{ظ}}$، فـ$_{\text{ظغظ}}$) V ك(فـ$_{\text{ظغظ}}$، غـ))

يمكن أن نلاحظ أن فصل (4)-(7) صحيح صدقيًا.

وإذا كنا نفضل قلب هذا البرهان على الصحة ونجعل الفصليات ظاهرة، فسيكفينا سطران طويلان. سيكون السطر الأول هو الفصل الذي يتكون من (4)-(7): الواسع إلى حد يسهل كتابتنا المزدوجة تحت الجمل المُعمَّمة. ويأتي بعد ذلك كسطر ثان الفصل (1) و(3)، ومن جديد (1) و(2): وسيوضع كل واحد من هذه الجمل تحت التعيين الذي يعمِّمه. ثم سنشطب على تكرار (1). وينتج الباقي، أي الفصل المكوَّن من (1)-(3)، بالفعل صيغة قانونية دالية للفصل الذي يضم صورًا تسويرية كان ينبغي إثبات صحتها (أي تلك الخاصة بـ (1)-(3) من الفصل 36). (*)

لقد سمحت لنا تطبيقات متعددة ومتزامنة لـ ع.و بالحصول على ذلك دفعة واحدة. وهذا الامتياز الذي تزودنا به الصور القانونية الدالية في البراهين على الصحة يطابق امتيازها الذي لاحظناه من قبل بخصوص البراهين على عدم الاتساق (الفصل 35)، أي إمكانية الانتقال دون انتظار إلى التعيينات غير المسوّرة عبر تطبيقات مكررة لـ ت.ك.

لننظر الآن في طريقة الصور القانونية الدّالية حسب دربن، أي دون اللجوء إلى صيغة شاملة. وسألجأ هذه المرة مباشرة إلى الطريقة النهائية

التي تشتق منها بالتقابل، قلب وكتابة الفصليات. نود مثلًا أن نثبت صحة الصيغة التالية:

∧ع (∨س [∨ هـ (ك(س هـ). ∧ ك(هـ س))← ¬ك(س ع)] ←

∨س [¬ك(س ع) . ∧ ∧ف (ك(س ف) ← ¬ك(ف س))]).

نقوم بإعداد هذه الصيغة بحذف رابطي الشرط اللذين يتحكمان في الأسوار:

∧ع {¬ ∨س [¬∨ هـ (ك(س هـ) . ∧ ك(هـ س)) ∨ ¬ك(س ع)] ∨

∨س [¬ك(س ع) . ∧ ∧ف (ك(س ف) ← ¬ك(ف س))]}.

ندفع أيضًا النفي نحو الداخل:

∧ع {∨س [∨ هـ (ك(س هـ) . ∧ ك(هـ س)) . ∧ ك(س ع)] ∨

∨س [¬ك(س ع) . ∧ ∧ف (ك(س ف) ← ¬ك(ف س))]}.

ينبغي أن نغير أحرف الأسوار الكلية (وليس الأسوار الوجودية) إذا ظهرت تكرارات؛ والحقيقة أنها لا توجد. ننتقل، إذًا، إلى الصورة القانونية الدّالية:

(1) ∨س [∨ هـ (ك(س هـ) . ∧ ك(هـ س)) . ∧ ك(س ع)] ∨ ∨س [¬ك(س ع) . ∧ ك(س فـ) ← ¬ ك(فـ ، س))].

ولكي نبني البرهان، نضع أولًا الصيغة الصحيحة صدقيًا التالية:

ك(ع ع) . ∧ك(ع ع) . ∧ ك(ع ع) .∨. ك(فـ ، ع) . ∧ ك(ع فـ) . ∧ ك(فـ ، ع) .∨.¬ ك(ع ع) . ∧ ك(ع فـ) ← ¬ ك(فـ ، ع).

وبموجب ذلك نقوم بخمسة خطوات متزامنة لـ ع.و. ونكتب تحت الجملة «ك(ع ع). ∧ك(ع ع). ∧ ك(ع ع)»، النصف الأول لـ(1) باعتباره تعميمًا له؛ وتحت الجملة «ك(فـ ، ع) . ∧ك(ع فـ) .∧ ك(فـ ، ع)» نكتب مجددًا النصف الأول لـ (1)؛ وتحت الجملة الأخيرة «¬ك(ع ع) . ∧ك(ع فـ) ← ¬ك(فـ ، ع)» نكتب النصف الثاني لـ(1). سيكون السطر الذي نحصل عليه بعد حذف الجملة المكرّرة حقًا هو (1) كما كنا نرغب فيه (†).

وقبل أن نترك موضوع طرق البتّ في الصحة، لنتوقف لحظة عند الطريقة الأكسيومية. تُعدُّ طريقة هيربراند، كما رأينا في الفصل السابق، نوعًا منها، مع ما لا نهاية له من مسلَّماتها (الصور الصحيحة صدقيًا) وقواعدها الاستدلالية الثلاث (ع.ك الجملية، وع.و الجملية، وحذف المكررات). غير أن هناك أيضًا أنساقًا أكسيومية أقرب إلى الأنساق الصدقية الواردة في الفصل 13: أنساقًا تتضمن فقط القليل من صور المسلَّمات وكذا قانون الوضع والإنابة كقواعد استدلالية. كانت تلك من وقت قريب الطريقة المعتادة لبلورة الموضوع. تكون للعملية الأكسيومية النمطية من هذا النوع، والتي تشمل الدوال الصدقية والتسوير في الوقت نفسه، كمسلَّمات الصيغ (1)-(3) من الفصل 13، بالإضافة إلى الصورتين التاليتين:

(2) ∧سـ ك(سـ) ← ك(ع)، ∧سـ (ب ← ك(سـ)) ←. ب← ∧سـ ك(سـ).

تشمل قواعدها الاستدلالية من جديد قانون الوضع والإنابة، غير أن الإنابة تكون بالمعنى الوارد في الفصل 28. تنضاف إليها قاعدة تسمح بتعديل أحرف المتغيرات، وكذا قاعدة ع.ك في صيغة بسيطة، غير جملية: يُمكن أن نربط سورًا كليًا بسطر مبرهن عليه. يظهر جليًا أن النسق يعالج فقط النفي والشرط والتسوير الكلي، وسيزداد مداه مع ذلك، كما كُنّا نرغب فيه، عندما نترجم في ترميزه، بالكيفية التي نعرفها جيدًا، علامات الدوال الصدقية والأسوار الوجودية الأخرى إلى هذا الترميز بالكيفية التي نعرفها جيدًا.

سأقدم مثالًا مقتضبًا فقط عن البرهنة داخل هذا النسق. فبعد إجراء إنابة على المسلمتين الأخيرتين، ثم تغيير حرف متغيّر مقيّد، نحصل على:

∧هـ ∧سـ (ل(هـ) ← ك(سـ)) ← ∧سـ(ل(ع) ← ك(سـ))،

∧سـ(ل(ع) ← ك(سـ)) ←. ل(ع) ← ∧سـ ك(سـ).

وبعد إنابة نجريها داخل المُسلَّمة (1) من الفصل13، نحصل على:

Λهـ Λسـ (ل(هـ) ← ك(س)) ← Λسـ(ل(ع) ← ك(س)) .←: Λسـ (ل(ع)

← ك(س)) ←. ل(ع) ← Λسـ ك(س) : ←: Λهـ Λسـ (ل(هـ) ← ك(س))

←. ل(ع) ← Λ سـ ك(س).

ومن هذه النتائج الثلاث نستنبط، بتطبيق قانون الوضع مرتين، ما يلي:

Λهـ Λسـ (ل(هـ) ← ك(س)) ←. ل(ع) ← Λ سـ ك(س).

لا يُجدي إثبات صيغ هامة بواسطة هذه الطريقة مهما علمنا أن النسق تام.

وكما أكدنا على ذلك في الفصل 13، إن اشتقاق مبرهنات في مجالات تكون فيها طريقة البتّ ممكنة، لا يكلِّف شيئًا. ولهذا فمن المناسب، كما في طريقة هيربراند، أن نعتبر مسلَّمات كل الصيغ الصحيحة صدقيا. ويمكن أن نوسع هذا المبدأ أكثر طالما أننا نتوفر على طريقة للبت بالنسبة إلى الصيغ التسويرية الواحدية: نستطيع أن نعتبر كل الصيغ التسويرية الواحدية الصحيحة مسلَّمات.

أقصد بهذا، كما أشرتُ إلى ذلك في بداية الفصل 28، أكثر من الصيغ الواحدية الصحيحة؛ أقصد، أيضًا، الصيغ المتعددة، التي يُمكن أن نحصل عليها انطلاقًا من صيغ واحدية صحيحة بواسطة الإنابة. وتوجد طريقة للبتّ ليس فحسب في صحة الصيغ الواحدية بل في الصحة الواحدية للصور المتعددة كذلك.

وبما أن لدينا صورة ما، فلنجر عليها كل الإنابات الفوقية الواحدية الممكنة. بعبارة أخرى، لنتخيل كل الصيغ الواحدية التي يُمكن أن نحصل عليها بواسطة الإنابة. سنستنفدها بسرعة إذا كنا نجهل تمامًا الاختلافات الاعتباطية التي يقود إليها الاختيار الأبجدي للأحرف الصورية. وهكذا فإن الإنابات الفوقية الممكنة الوحيدة لـ «ك(عـ ع) ← Vسـ ك(سـ ع)»، إذا كنا نجهل الاختلافات المعنية، ستكون هي «ل(ع) ← Vسـ ل(س)»، و«ل(ع)

←م (ع)» و«م(ع) ← Vسـ ل(س)»، وعبارات مبتذلة من قبيل «ب ← Vسـ ل(س)» و«ب ← جـ» و«ب». وعليه، بإمكاننا أن نتحقق، مبدئيًا، من كل هذه الصيغ الواحدية ونرى إن كانت إحداها صحيحة. ومن المؤكد أننا نلحظ عمليًا بسرعة أي إنابة فوقية نجريها ونتحقق منها.

نظرًا لتمام مثل هذه الأنساق من المسلّمات، كما يوضح ذلك النسق الأخير، فمن السهل أن نرى أننا نحصل على نسق تام لنظرية التسوير إذا اعتبرنا كل الصيغ الواحدية الصحيحة مسلّمات، ثم قانون الوضع وحده وع.ك البسيطة كقاعدتين استدلاليتين. وفي ما يلي مثال عن البرهان داخل هذا النسق. يظهر أن الصيغ:

ك(سـ ع) ← Vسـ ك(سـ ع)،

Λع(ك(سـ ع) ← Vسـ ك(سـ ع)) ←. Λعـ ك(سـ ع) ← Λعـ Vسـ ك(سـ ع)،

Λسـ (Λعـ ك(سـ ع) ← Λعـ Vسـ ك(سـ ع)) ←. Vسـ Λعـ ك(سـ ع) ← Λعـ Vسـ ك(سـ ع).

كلها، بعد التحقق، صحيحة واحديًا، وبالتالي مؤهلة لتصلح كمسلّمات. (ومن الأفضل للقارئ أن يوضح بواسطة إنابة فوقية هنا الصور الواحدية الصحيحة الملائمة. والصورة الثالثة هي «Λسـ (ل(س) ← ب) ←. Vسـ ل(س) ← ب)». وينتج عن أولى هذه الصيغ الثلاث بواسطة ع.ك ما يلي:

Λعـ (ك(سـ ع) ← Vسـ ك(سـ ع)).

نحصل من هذه النتيجة ومن الصيغة الثانية بواسطة قانون الوضع:

Λعـ ك(سـ ع) ← Λعـ Vسـ ك(سـ ع)

ومن ثم نحصل بواسطة ع.ك على:

Λسـ (Λعـ ك(سـ ع) ← Λعـ Vسـ ك(سـ ع)).

ونحصل من هذه النتيجة ومن آخر الصيغ الثلاث بواسطة قانون الوضع،

على مبرهنتنا المتعددة الخالصة والمفضلة:

Vسـ∧عـك(سـ عـ) ← ∧عـVسـك(سـ عـ).

وبتكييفنا ترميز البرهنة المكثف الوارد في الفصل 13، نستطيع أن نكتب البرهان بتمامه على هذا النحو الآتي:

[1] ك(سـ عـ) ← Vسـك(سـ عـ)

[2] [∧عـ1 ←.] ∧عـك(سـ عـ) ← ∧عـVسـك(سـ عـ)

[∧سـ2 ←.] Vسـ∧عـك(سـ عـ) ← ∧عـVسـك(سـ عـ).

يمثّل الرقم «2» في السطر الأخير السطر [2] ناقص جزئه الذي يقع بين المعقوفين «[∧عـ1 ←.]». والقصد من الترميز هو أن كل سطر، بما في ذلك جزءه الأوّلي الواقع بين معقوفين، يعتبر صحيحًا واحديًا.

لمحة تاريخية: لقد كان الأسلوب الأكسيومي المبيَّن بواسطة (2)، كما لاحظنا ذلك في نهاية الفصل 30، أسلوب فريغه. أما المسلَّمات التي ظهرت في (2) فتعود لراسل، 1908، باستثناء أنه كان يستعمل «V» مرتين مكان «←». كما أن المسلَّمات الصدقية التي تدعمه أقل وضوحًا من مسلَّمات لوكازفيتش والتي اخترناها أعلاه، أي (1)-(3) من الفصل 13.

تمارين

1. أنجز(*) و(†)
2. ينصح باستعمال الطريقة الأخيرة من هذا الفصل كقاعدة لتمارين أخرى: اشتقاق انطلاقًا من صيغ صحيحة واحديًا باستعمال ترميز البرهنة المكثف. أعِد، بواسطة هذه الطريقة، حلّ الأمثلة والتمارين الواردة في الفصلين 29 و31.

38 الاستنباط

لا نستطيع أن نقوم بقلب الطريقة الأساسية بغية الحصول على برهان مباشر على الصحة (الفصل 36) فقط: بل بإمكاننا أيضًا أن نقسمها ونقلبها جزئيًا بغية الحصول على عملية برهنة مباشرة على اللزوم. وسيُفهم هذا المشروع، بالتأكيد، من خلال مثال. لنأخذ مجددًا المثال الوارد في الفصل 27 الخاص باللوحات الفنية والنقاد. لقد أثبته القارئ في التمرين 2 من الفصل 30 بالاستدلال على أن المقدمة:

(1) Vع∧س (ك(ع) .∧ ل(س) ← م(س، ع))

كانت غير متسقة مع ما ستصبح عليه النتيجة المطلوبة:

(2) ∧س Vع (ل(س) ←. ك(ع) .∧ م(س ع))

بعد النفي، أي:

(3) Vس ∧ع ~(ل(س) ←. ك(ع) .∧ م(س، ع)).

ويُثبت عدم اتساق (1) و(3) بواسطة اشتقاق «ك(هـ). ∧ل(ف) ← م(ف، هـ)» من (1) بواسطة ت.وت.ك، ثم اشتقاق «~ (ل(ف) ←. ك(هـ) . ∧م(ف، هـ))» من (3) بالطريقة نفسها، وفي النهاية أشار إلى عدم الاتساق الصدقي لهذين التعيينين. وأما مشروعنا الجديد، على العكس من ذلك، بتشديده على المظهر الإيجابي، يطالبنا بألّا ننتقل من (1) و(3) إلى الخُلْف، بل من (1) وحدها إلى (2). ندخل، في البداية، التعيين «ك(هـ) . ∧ل(ف) ← م(ف هـ)» من (1) كما فعلنا في السابق: والحال أن هذه الأخيرة، لكي تكون غير متسقة صدقيًا مع «~ (ل(ف) ←. ك(هـ) . ∧م(ف، هـ))»، ينبغي أن تستلزم صدقيًا

«ل(ف) ← ك(هـ) . ∧م(فـ هـ)». وهكذا نستنتج «ل(ف) ←. ك(هـ) . ∧م(فـ هـ)» من «ك(هـ) . ∧ل(ف) ← م(فـ هـ)» بواسطة قاعدة جديدة ق.ص.ا، أو قاعدة الاستدلال الصدقي (truth functional inference). ومن هذه، نتوصل إلى النتيجة المطلوبة (2) بواسطة تطبيقات ع.و وعك، التي تعكس خطوات تطبيقات ت.و وت.ك، التي تقودنا في الاستدلال القديم من (3) إلى «⌐(ل(ف) ←. ك(هـ) . ∧ م(فـ هـ))».

نحصل بهذه الوسيلة على استنباط (2) انطلاقًا من (1). يتم ذلك كالآتي:

<u>مقدمة:</u>

V‌ع ∧س (ك(ع) .∧ ل(س) ← م(سـ ع)).

<u>استنباط:</u>

∧س (ك(هـ) . ∧ ل(س) ← م(فـ هـ))	(ت.و)
ك(هـ) . ∧ ل(ف) ← م(فـ هـ)	(ت.ك)
ل(ف) ←. ك(هـ) . ∧ م(فـ هـ)	(ق.ص.ا)
V‌ع (ل(ف) ←. ك(ع) . ∧ م(فـ ع))	(ع.و)
∧س V‌ع (ل(س) ← ك(ع) . ∧ م(سـ ع))	(ع.ك)

تظل العملية هي نفسها إذا استنبطنا من المقدمة، كما هو الحال في المثال السابق، عدة تعيينات غير مسوّرة:

<u>مقدمة:</u>

∧ف ∧س ⌐(ك(سـ ع) .∧ ك(سـ ف) ∧ ك(فـ س))

<u>استنباط:</u>

∧س ⌐(ك(سـ ع) .∧ ك(سـ ع) .∧ ك(عـ س))	(ت.ك)
⌐(ك(عـ ع) .∧ ك(عـ ع) .∧ ك(عـ ع))	(ت.ك)
⌐(ك(هـ ع) .∧ ك(هـ ع) .∧ ك(عـ هـ))	(ت.ك)

~(ك(عـ ع) .٨ ~ك(عـ هـ) V ~ك(هـ عـ)) (ق.ص.ا)

٨ف (~ك(عـ ع) .٨ ~ك(عـ ف) V ~ك(ف عـ)) (ع.ك)

V سـ ٨ف (~ك(سـ ع) ٨ ~ك(سـ ف) V ~ك(ف سـ)). (ع.و)

ومن بين الفروق الموجودة بين هذا الاستنباط وسابقه هو أن السطر المُحصَّل عليه بواسطة ق.ص.ا ينتج عن السطرين اللذين يسبقانه. وهذان الأخيران يستلزمانه معًا.

والشيء نفسه يحصل إذا كانت لدينا مقدمتان أو أكثر.

مقدمتان:

٨سـ (ل(سـ) ←. ك(سـ) V م(سـ))

V سـ (ل(سـ) . ٨ ~م(سـ)).

استنباط:

ل(سـ) . ٨ ~م(عـ) (ت.و)

ل(عـ) ←. ك(عـ) V م(عـ) (ت.ك)

ك(عـ). ٨ ~م(عـ) (ق.ص.ا)

V سـ (ك(سـ) .٨ ~م(سـ)) (ع.و).

غير أن هناك تعقيدًا يبرُز عندما نعتمد أكثر من تعيين واحد غير مسوَّر للنتيجة. هب أننا نتوفر على المقدمة:

(1) ٨عـ V سـ (ك(عـ ع) ٨ ك(عـ سـ) V ك(سـ عـ))

ونرغب في الحصول على النتيجة «٨عـ V سـ (ك(سـ عـ)». وَفقًا للطريقة الأساسية، سننفي النتيجة، ونحولها إلى صيغة «V عـ ٨سـ ~ك(سـ عـ)»، ثم نبين أن ذلك غير متسق مع (4) عبر اشتقاق التعيينات غير المتسقة من «V عـ ٨سـ ~ك(سـ عـ)» و(4) بالطريقة الآتية:

٨سـ ~ك(سـ هـ)

V سـ (ك(هـ هـ) . ٨ ك(هـ سـ). V ك(سـ هـ))

ك(هـ هـ) . ٨ ك(هـ ف) . V ك(ف هـ)

¬ك(هـ هـ)

¬ك(ف هـ)

وبخلاف ذلك، إذا حاولنا أن نحوّل هذا البرهان على عدم الاتساق إلى استنباط بواسطة حيلة قلب جزئي، فسنفشل. ولأن «Vعـ ٨سـ ¬ك(سـ عـ)» لا تزوّدنا بتعيين وحيد غير مسوّر، بل بتعيينين، «¬ ك(هـ هـ)» و«¬ ك(ف هـ)»، فعدم اتساقهما الصدقي مع التعيين «ك(هـ هـ) . ٨ ك(هـ ف) . V ¬ك(ف هـ)» لـ (4) لا يسمح لنا البتة بالمطالبة لا بـ « ك(هـ هـ)»، ولا بـ «ك(ف هـ)» كنتيجة لـ «ك(هـ هـ) . ٨ ك(هـ ف). V ك(ف هـ)» بواسطة القاعدة ق.ص.ا: فأكثر ما يُمكن أن نطالب به هو فصلها، أي «ك(هـ هـ) V ك(ف هـ)». ومن هذا الفصل لا ننتقل إلى النتيجة المطلوبة «٨عـ Vسـ ك(سـ عـ)» إلا بفضل تعزيز قواعدنا: تطبيقان لـ ع.و الجملية سينتجان فصل الصيغة «V سـ ك(سـ هـ)» مع ذاتها، ونتيجة ذلك ستخلصنا ق.ص.ا من التكرار فنتمكن من الانتقال بواسطة ع.ك إلى «٨عـ Vسـ ك(سـ عـ)».

وهكذا تستعمل طريقتنا الاستنباطية بعد تعزيزها القواعد التالية: ت.ك وت.و وق.ص.ا وع.و الجملية، و(في حالة احتياج مماثل في براهين أخرى) ع.ك الجملية. وتكون كل من ع.و وع.ك أيضًا موضوعًا لاستعمال بسيط، بحيث لا تكون هذه الأخيرة سوى حالات خاصة لاستعمالها الجملي عندما تكون الجملة التي نطبقها عليها هي السطر بأكمله.

دعونا الآن نجمّع استنباط «٨عـ Vسـ ك(سـ عـ)» انطلاقًا من (4).

<u>مقدمة:</u>

٨عـ Vسـ (ك(عـ عـ) . ٨ ك(عـ سـ). V ك(سـ عـ))

<u>استنباط:</u>

Vسـ (ك(هـ هـ) . ٨ ك(هـ سـ) .V ك(سـ هـ)) (ت.ك)

ك(هـ هـ) . Λ ك(هـ ف) .V ك(ف هـ)	(ت.و)
ك(هـ هـ) V ك(ف هـ)	(ق.ص.ا)
Vسـ ك(سـ هـ) V ك(ف هـ)	(ع.و الجملية)
Vسـ ك(سـ هـ)V Vسـ ك(سـ هـ)	(ع.و الجملية)
Vسـ ك(سـ هـ)	(ق.ص.ا)
Λعـ Vسـ ك(سـ ع)	(ع.ك)

إذا قورنت الاستنباطات التي لخصناها قبل قليل في هذا الفصل بالبراهين على عدم الاتساق التي ترتبط بها بواسطة القلب الجزئي، فسنرى أن التعيين الوجودي (ت.و) للبراهين على عدم الاتساق تترك المكان في حالة القلب ليس للتعميم الوجودي (ع.و)، بل للتعميم الكلي (ع.ك). وهكذا فإن المرحلة الأخيرة للاستنباط أعلاه تنقل من «Vسـ ك(سـ هـ)» إلى النتيجة المطلوبة «Λعـ Vسـ ك(سـ ع)» بواسطة ع.ك؛ والمرحلة المقابلة لها في البرهان على عدم الاتساق تنطلق من نفي هذه النتيجة المطلوبة، أي من «Vعـ Λسـ ‒ك(سـ ع)»، إلى «Λسـ ‒ك(سـ هـ)» بواسطة ت.و. ونتيجة لذلك، مثلما كانت ت.و تخضع في الطريقة الأساسية لمطلب المتغيرات التعيينية الجديدة، وجب على كل من ت.و وع.ك أن يُخضَعا معًا بطريقة مقابلة. بعبارة أصح، بما أن الاستنباط طريقة للبرهنة على اللزوم، وأن ت.و وع.ك لا يتوفران على قوة لزومية، فإن قيودًا من هذا النوع تفرض نفسها بالضرورة.

ومع ذلك إن طبيعة القيد الملائم ليست بمثل البساطة والبداهة التي كانت عليها في الطريقة الأساسية. ولا نستطيع أن نفرض سوى أن يكون متغير التعيين لـ ع.ك متغيرًا جديدًا، لأن ع.ك لا تدخل متغير التعيين؛ بل تحذفه. ولن يكفي زيادة على ذلك أن نقلب الوضع ونطالب، كما هو الحال في طريقة هيربراند (الفصل 36)، بألا يظهر متغير التعيين لـ ع.ك مجددًا في ما بعد؛ لأن طريقتنا الاستنباطية تستعمل ت.و مثلما تستعمل ع.ك، وبين

متغيرات تعيينها يُمكن أن تحصل التقاءات مُفسِدة لا يمنعها هذا المطلب بتاتا. لنتمعن مثلًا في هذه المغالطة:

مقدمة:

Vسـ ك(سـ)

استنباط:

ك(ع)   (ت.و)،

Λسـ ك(سـ)   (ع.ك) (خاطئ)

لا تستلزم «Vسـ ك(سـ)» بالتأكيد «Λسـ ك(سـ)».

هناك، مع ذلك، قيدان بسيطان يبدو أنهما كافيان: يجب أن تكون متغيرات التعيين لـ ت.و وع.ك مختلفة عند كل خطوة، ويجب أن يكون متغير التعيين خلال كل خطوة لاحقًا أبجديا لكل المتغيرات المطلقة للسطر المولّد للخطوة المعنية. سنجد في الفصل اللاحق البرهان على صحة الطريقة. وفي الحالة التي يحتفظ فيها بالقاعدتين ع.ك وع.و الجمليتين، يجب أن نشترط أيضًا ألا ينبغي أن يكون متغير التعيين مطلقًا في أي جملة أخرى للسطر المولّد: غير أنه سيتم استبدال ع.ك، فستكون ع.ك وع.و الجمليتين مستقبلًا.

إن الاستنباط المختصر والمغلوط، الذي عرضناه في الأسطر القليلة أعلاه، مقصي بسبب امتناع استعمال متغير التعيين نفسه «ع» في خطوتين تنجمان، على التوالي، عن ت.و وع.ك. بعبارة أصح، يتم عرض الاستنباط الكبير الذي سبق بواسطة استعماله لـ ت.و، لأنّ «هـ» الموجود في السطر المولّد لاحق أبجديًا بالفعل لمتغير التعيين «ف». ويمكن أن نعالج، مع ذلك، هذا الخرق دون خسارة، إذ يكفي استعمال متغير لاحق أبجديًا على«هـ»، مثلًا «هـ» مكان «ف» في الأسطر الثلاثة حيث يظهر «ف». نلاحظ في سهولة هذا التقويم أن القيد الأبجدي بالفعل أكثر صلابة مما هو ضروري. تكمُن

ميزته في كونه أبسط من بدائله الأكثر إطلاقًا، والحالات التي يقصيها دون موجب يُمكن أن تُحلّ بيُسر أيضًا.

إليك مغالطة حقيقية تقصي القيد الأبجدي، ولن يتمكن تغيير الحرف من تصحيحها:

<u>مقدمة:</u>

Λسـ Vعـ ك(سـ عـ)

<u>استنباط:</u>

Vعـ ك(فـ عـ)	(ت.ك)
ك(فـ هـ)	(ت.و)
Λسـ ك(سـ هـ)	(ع.ك) (خاطئ)
Vعـ Λسـ ك(سـ عـ)	(ع.و)

إن المتغير المطلق «هـ» في السطر المحصل عليه بواسطة ع.ك لاحق أبجديًا على متغير التعيين «فـ» الناجم عن تطبيق ع.ك. وإذا صححناه باستعمال «هـ'» مكان «هـ» فإننا سنخرق حينها القيد الأبجدي في خطوة ت.و.

ولكي نجعل ملاحظتنا لهذه القيود أسهل، وكذا من أجل هدف سيتم ذكره قريبًا، من المناسب أن نؤشر على كل مرحلة لـ ت.و وع.ك مع التذكير بأن متغير التعيين على يسار هذا التطبيق هو الذي ينتج هذا التطبيق. من المناسب أيضًا، وبالأحرى عندما يكون الاستنباط أكثر تعقيدًا، أن نرقِّم الأسطر من اليمين ثم نحيل عليها، كما نحيل على العديد من المصادر، في اليسار. إن ذكر القواعد (ت.ك، ق.ص.ا، إلخ) في الحقيقة أقل أهمية؛ إذ بمجرد ما نعطي المصدر يغدو من السهل نسبيًا التعرف على القاعدة. وزيادة على ذلك، لنعيّن المقدمة، بغية استعمال معين في المستقبل، لا باسمها، بل بالبدء بوضع عمود نجمات ثم ننزل بها على طول الاستنباط. تدلّ كل نجمة على أن السطر المُنجَّم يتم إثباته فقط بطريقة شرطية على أساس المقدمة.

إليك الاستنباط الطويل المعروض أعلاه وقد أعدنا كتابته بأسلوب جديد ومصحَّح بالتفصيل الأبجدي.

* (1) Λعـ Vسـ (ك(عـ عـ). Λ ك(عـ سـ) .V ك(سـ عـ))

* (2) Vسـ (ك(عـ عـ) . Λ ك(هـ سـ).V ك(سـ هـ)) (1)

* (3) ك(عـ عـ) . Λك(عـ عـ′).V ك(هـ′، هـ)) (2) هـ′

* (4) ك(هـ هـ) V ك(هـ′، هـ) (3)

* (5) Vسـ ك(سـ هـ) V ك(هـ′، هـ) (4)

* (6) Vسـ ك(سـ هـ)V Vسـ ك(سـ هـ) (5)

* (7) Vسـ ك(سـ هـ) (6)

* (8) Λعـ Vسـ ك(سـ عـ) (7) هـ

وسيعرض الاستنباط القصير، الذي سبق هذا الاستنباط، ولن يستعمل سوى مقدمتين، بالصيغة الموالية:

* (1) Λسـ (ل(سـ) ←. ك(سـ) V م(سـ))

** (2) Vسـ (ل(سـ) . Λ ¬م(سـ))

** (3) ل(عـ) . Λ ¬م(عـ) (2) عـ

** (4) ل(عـ) ←. ك(عـ) V م(عـ) (1)

** (5) ك(عـ) . Λ ¬م(عـ) (3)(4)

**(6) Vسـ (ك(سـ) . Λ ¬م(سـ)) (5)

برجوعنا إلى حيلة التأشير، نستطيع أن نصوغ الآن بشكل جد مختصر قيودنا على ت.و وع.ك: لا ينبغي أن يؤشَّر أي متغير مرتين، ولا ينبغي لمتغير مطلق في سطر مؤشَّر أن يكون لاحقًا أبجديًا على حرف مؤشَّر.

إن الوضع الذي نطالب به بالنسبة إلى السطر الأخير من الاستنباط، أو في الحقيقة بالنسبة إلى أي سطر كان هو أن يكون لازمًا عن مقدماته. وهناك تحفظات لابد منها، مع ذلك، ذات علاقة بالمتغيرات المؤشَّرة. الحقيقة أن

إثبات اللزوم يكون صحيحًا شريطة ألا يكون أي متغير مؤشَّر مطلقًا في السطر الذي نعتبره مستلزَما ولا في مقدماته. تبين آخر الاستنباطات أعلاه أن (1) و(2)، على سبيل المثال، تستلزمان (6)، ولا تبين أنهما يستلزمان (5). وبإمكان القارئ أن يتأكد من أن الأمر يتم على هذا النحو. ولنأخذ أيضًا الاستنباط ما قبل الأخير، ولنتخيل أن السطر (2) يشكل مقدمته، وبحذف (1)، لا يُمكن لهذا الاستنباط أن يدّعي إثبات أن (2) تستلزم (8)، لأن «هـ» مطلقة في المقدمة (2). ويكون الاستنباط تامًا إذا لم يكن أي متغير مؤشَّر مطلقًا في سطره الأخير، أو في أي مقدمة يتوقف عليها هذا السطر الأخير. هكذا تكون خاصية الاستنباط التام هي أن يكون سطره الأخير لازمًا عن مقدماته.

توجد حيلة شائعة الاستعمال إلى حد كبير في الاستنباط تعرف باسم البرهان الشرطي. ينتج عن تبنّيه إعفاء الصيغ الجملية ع.ك وع.وفي النهاية؛ كما يتوفر أيضًا على نتيجة جد هامة تكمُن في حذف كلي، في الاستنباطات، مطلب الصيغة الشاملة. بإمكاننا علاوة على ذلك أن نطالب لصالحه بما هو طبيعي. يكمُن في أن نتبنى، مؤقتا، مقدمة إضافية، ثم نحذفها بواسطة إشراط (شا): بإدماجها في النتيجة كمقدم للشرط. تكون العملية العامة كالتالي: انطلاقًا من افتراض ب، نبين جـ ومن هنا نستنتج أن ب ← جـ

تقتضي هذه الطريقة ترميزًا خاصًا لكي لا تغيب عن نظرنا الأسطر المتوقفة على المقدمة المؤقتة. ها هنا سيحصل ترميزنا بالنجوم، الذي ظل إلى الآن بلا فائدة، على دور حقيقي. نعلِّم المقدمة المؤقتة بنجمة وكل سطر يتوقف عليها. وفي حالة ما إذا تم اعتماد مقدمة مؤقتة أخرى بينما تكون إحدى هذه المقدمات سارية فعلًا، فإننا نبدأ عمودًا آخر من النجوم نحو اليسار.

وعلى سبيل المثال، لنعد مرة أخرى إلى الاستنباط ما قبل الأخير، ولننظر كيف كان من الممكن أن نجريه بواسطة الاستدلال الشرطي.

* (1) ∧ع V س (ك(ع، ع) . ∧ ك(ع، س) .V ك(س، ع))
* (2) Vس (ك(ع، ع) . ∧ ك(هـ، س) .V ك(س، هـ)) (1)
* (3) ك(هـ، هـ) . ∧ ك(هـ، هـ') .V ك(هـ'، هـ) (2) هـ'
** (4) ك(هـ، هـ)
** (5) Vس ك(س، هـ) (4)
* (6) ك(هـ، هـ) ← Vس ك(س، هـ) (5)*
** (7) ك(هـ'، هـ)
**(8) Vس ك(س، هـ) (7)
* (9) ك(هـ'، هـ) ← Vس ك(س، هـ) (8)*
* (10) Vس ك(س، هـ) (3)(6)(9)
*(11) ∧ع V س ك(س، ع) (10) هـ

ينتهي عمود النجمات الذي ينتمي إلى المقدمة تمامًا عندما ينقطع. وينتمي العمود المقتضب ذو النجمتين الواقع على يسار (4) و(5) إلى المقدمة المؤقتة «ك(هـ، هـ)» ولا علاقة له بالعمود المماثل الذي يظهر في (7) و(8) الذي ينتمي إلى المقدمة المؤقتة «ك(هـ'، هـ)».

يمكن أن نمدد الاستنباط السابق بإضافة سطر ليس به نجمة.

(12) ∧ع V س (ك(ع، ع) . ∧ ك(ع، س) . V ك(س، ع)) ← ∧ع V س ك(س، ع) (11)*

فتُتضمن بذلك المقدمة الأصلية ذاتها في النتيجة. وعندما يكون السطر الأخير من الاستنباط المنتهي غير معلَّم بنجمة، فإنه يدعي الصحة التامة: لم يعد يمثل مجرد نتيجة للمقدمة.

وآخر مثال يوضح فائدة المقدمات المؤقتة والإشراط في دراسة الصيغ التي لا تكون شاملة. يتعلق الأمر مرة أخرى بحجة اللوحات الفنية والنقاد التي تناولناها في مستهل هذا الفصل، نعبر هذه المرة مباشرة عن المقدمة

والنتيجة بالصيغة التي كانت عليها في الفصل 27. لن نحولها إلى صيغة شاملة ولن ننفي النتيجة.

* (1)	Vعـ [ك(ع) . ∧ ∧سـ (ل(س) ← م(س، ع))]	
* (2)	ك(هـ) . ∧ ∧سـ(ل(س) ← م(س، هـ))]	(1) هـ
*(3)	∧سـ(ل(س) ← م(س، هـ))	(2)
*(4)	ل(ف) ← م(ف، هـ)	(3)
**(5)	ل(ف)	
**(6)	ك(ف) . ∧ م(ف، هـ)	(5)(4)(2)
**(7)	Vعـ (ك(ع) . ∧ م(ف، ع))	(6)
*(8)	ل(ف)← Vعـ (ك(ع) . ∧ م(ف، ع))	*(7)
*(9)	∧سـ [ل(س)← Vعـ (ك(ع) . ∧ م(س، ع))]	(8) فـ

لمحة تاريخية: تُعرَف الطريقة التي بلورناها في الصفحات السابقة باسم الاستنباط الطبيعي، والذي تعود أصوله، في خطوطها العريضة، إلى غينتسن (Gentzen) وياسكوفسكي (1934) (Jaśkowski). أمّا قاعدة الإشراط التي تعد جوهر الاستنباط الطبيعي، فقد ظهرت كقاعدة صورية صريحة في وقت مبكر إلى حد ما؛ إذ اشتقّها هيربراند (1930) وكذا تارسكي (1929) من أنساقهما الخاصة، المختلفة عن الاستنباط الطبيعي. يكمُن الاشتقاق في البرهنة على أنه متى تم استنباط عبارة من عبارة أخرى داخل النسق المعني، يُمكن البرهنة على أن الشرط الذي يتكون من العبارتين باعتباره مبرهنة بواسطة القواعد الأصلية لهذا النسق. وعندما تحوز قاعدة الإشراط منزلة قاعدة مشتقة تتعلق بهذا النسق أو ذاك، يصطلح عليها، في الأدبيات المنطقية، باسم مبرهنة الاستنباط.

يختلف نسق الاستنباط الطبيعي لياسكوفسكي بشكل واضح عن

النسق الذي عرضناه في هذه الصفحات: فياسكوفسكي يعفي نفسه فعلًا من ع.و وت.و، ويتخلص من ذلك بواسطة قيود أكثر ضعفًا على ع.ك، من خلال معالجة «Vس» و«Vع» إلخ، باعتبارها اختزالات لـ «⌐ Λسـ ⌐» و«⌐ Λعـ ⌐»، إلخ. يقتصد هذا الدرس في القواعد، لكنه يزيد بشكل كبير من صعوبة وتعقد الاستنباطات نفسها. يكمُن الفرق الأساسي بين نسق غينتسن والنسق الوارد في الصفحات الحالية في ت.و، فقد كانت لديه قاعدة أكثر انحرافًا.

وبسبب حضور ت.و فيه، يختلف نسقنا كثيرًا عن نسقيْ كل من غينتسن وياسكوفسكي في ما يتعلق بالقيود الموضوعة على القواعد. أما حيلة وضع المؤشرات تحديدًا فشيء جديد. اعتمد غينتسن وياكوفسكي أيضًا على القيود، لكنهما منحاها صورًا مختلفة. استعمل كولي (Cooley) في كتابه مبادئ المنطق الصوري (1942) (*Primer of Formal Logic*)، في الصفحات 126-140، الاستنباط الطبيعي بصورة تتضمن ت.و بشكل جوهري، ولكن دون صياغة دقيقة للقيود. كما حاول روسر (Rosser) وأنا، كلٌّ من ناحيته، إنجاز صياغة صريحة للقواعد والقيود الشبيهة بهذا النسق، باستثناء تغييرات كثيرة في القيود، وذلك في هوامش ودروس مرقونة منذ سنة 1946.

تمارين

1. تحقق من صحة كل الاستنباطات التالية بغية معرفة إن كانت تتم وَفقًا للقواعد، ومن كونها منتهية:

*(1) ك(ع)　　　　*(1) Λسـ (ك(سـ) ← ل(سـ))

*(2) Λسـ ك(مس)　　　　(1) عـ　　*(2) ك(ع) ← ل(ع))　　(1)

(3) ك(ع) ← Λسـ ك(سـ) *(2)

*(1) Λسـ (ك(سـ) ∨ ل(ع))
*(2) ك(ع) ∨ ل(ع) (1)
*(3) Λسـ (ك(ع) ∨ ل(سـ)) (2) ع

*(1) ك(سـ) ∨ ل(ع)
*(2) Λعـ (ك(سـ) ∨ ل(ع)) (1) ع
*(3) Vسـ Λعـ (ك(سـ) ∨ ل(ع)) (2)

*(3) Vسـ (ك(ع) ← ل(سـ)) (2)
*(4) ΛفـVسـ (ك(ف) ← ل(ع)) (3) ع

*(1) Λسـ (ك(سـ) .∧ ل(ع))
*(2) ك(ع) .∧ ل(ع) (1)
*(3) ك(ع) (2)
*(4) Λسـ ك(سـ) (3) ع
*(5) ل(ع) (2)
*(6) Λسـ ل(سـ) (5) ع
*(7) Λسـ ك(سـ) .∧ Λسـ ل(سـ) (4)(6)

2. إذا كان أحد الاستنباطات السابقة صحيحًا وغير منتهٍ، قم بإضافة أسطر جديدة حتى تتمكن من إنتاج استنباط منتهٍ، وإذا كان أحدها غير صحيح لكنه قابل للتحويل إلى استنباط صحيح للنتيجة نفسها، فقم إذًا بتحويله.

3. قم بمعالجة الأمثلة وحل التمارين المتنوعة الواردة في الفصلين 29 و31 مجددًا بواسطة الاستنباط.

39 صحة المنهج الاستنباطي

هيمن المنهج الاستنباطي الذي تم تحديده مؤخرًا على أول طبعتين لهذا الكتاب. تستغرق قواعده، كما نلاحظ، وقتًا أطول للشرح من تلك التي أسميها الآن الطريقة الأساسية، وسنرى أنه يستغرق وقتا أطول للبرهنة على صحته. بمجرد إنشائه يحوز هذا المنهج ميزات. لا يتطلب التحويل إلى صيغة شاملة، وهو موجه إلى اللزوم بدلًا من عدم الاتساق أو حتى الصحة، وتكون خطواته حدسية بشكل عام، ويميل البحث عن البراهين إلى السير بسلاسة.

إن هذا الأمر الأخير ليس صحيحًا دائمًا؛ إذ يكون اللزوم الواضح، أي الذي يبرهن عليه بسرعة بواسطة الطريقة الرئيسة، في بعض الأحيان عنيد خلال الاستنباط. ربما تكون طريقة الصور القانونية الصدقية من حيث الفعالية، في المعدل، هي الأفضل. أما بالنسبة إلى الطريقة الأساسية، فإنها غالبًا ما تكون سهلة، كما نعلم: إنها تفسح المجال لأسهل براهين التمام، وتفتح الطريق، الذي اتبعناه، لنصف دزينة من الطرق البديلة التي يُمكن اشتقاقها منه بسهولة، والتي هي فعالة أو مضيئة بطرقها المتعددة. هكذا، بخست في الطبعة الثالث من مرتبة الاستنباط، وقصرت معالجتي له على ما رأيناه في الفصل السابق.

لقد استاء من هذه الخطوة المعلِّمون الذين اعتادوا على الطبعات الأولى وتمسكوا بطريقتي في الاستنباط. ومن ثم أقوم بإضافة الفصل الحالي الذي يُمكن حذفه والفصل الذي يليه، حيث أرسم برهان إثبات الصحة وأناقش التقنيات الاستنباطية.

تعني صحة المنهج الاستنباطي أن السطر الأخير من الاستنباط النهائي يلزم عن مقدماته (أو صحيحة، إذا كانت خالية من المقدمات). لرؤية هذا، نحتاج إلى وقفة فقط شا وع.ك وت.و، نظرًا لأن ت.ك وع.ووق.ص.ا لازمة. ما يجب توضيحه في حالة شا هو أنه إذا تم استلزام سطر ما في الاستنباط من مقدماته، ثم نضيف إليه مقدمته الأخيرة بواسطة «←»، فإن الشرط الذي تم تشكيله على هذا النحو، يلزم عن المقدمات المتبقية. إن مفتاح هذا الآن هو تكافؤ «ب ∧ جـ ← د» مع «ب ←. جـ ← د». لأننا إذا، اعتبرنا «جـ ← د» تمثل الشرط المُستَنْتَج و«ب» المقدمات المتبقية، يلزم السطر المُمثَّل بـ «د» عن مقدماته التي تمثلها «ب ∧ جـ». لذا فإن «ب ∧ جـ ← د» تمثل شرطًا صحيحًا. وكذلك تفعل إذًا «ب ←. جـ ← د». ومِن ثَمَّ فإن الشرط المُستَنتَج («جـ ← د») يلزم عن المقدمات المتبقية («ب»).

يبقى إذًا النظر في ع.ك وت.و. ما هو واضح حتى الآن هو أنه إذا افتقر الاستنباط إلى ع.ك وت.و، بعبارة أخرى، إذا لم يكن له متغيرات مؤشَّرة، فإنه صحيح: يلزم سطره الأخير عن مقدماته. دعونا الآن نفترض أن الاستنباطات المنتهية ذات ن من المتغيرات المؤشَّرة صحيحة، وبناء على هذا الافتراض، دعونا نبدأ في إثبات أن الاستنباطات المنتهية ذات ن+1 من المتغيرات المؤشَّرة هي أيضًا صحيحة.

هب بعد ذلك أن استنباطًا منتهيًا له ن+1 من المتغيرات المؤشَّرة يكون «ع» هو أولها أبجديًا. وهب أنه يشير إلى خطوة من ع.ك. هكذا يكون للسطر المؤشَّر شكل «∧سـ(...سـ..)» ويتم استنتاجه من سطر «...عـ..». قم بتعديل الاستنباط عن طريق إضافة عمود جديد بالكامل من النجوم والمقدمة الجديدة:

*(0) ...عـ.. ← ∧سـ(...سـ..)

بما أن السطر «∧سـ(...سـ..)» مشتق من الأسطر «...عـ...» و(0) بواسطة

ق.ص.ا، يُمكننا إسقاط المؤشر «ع». إن «ع»، وَفقًا للقاعدة الأبجدية، هي آخر متغير مطلق أبجديًا في «...ع...». رغم أنه كان أول متغير مؤشّر أبجديًا في الاستنباط؛ لذلك لا توجد متغيّرات مؤشّرة مطلقة في (0) الآن بعد أن تم حذف المؤشِّر عن «ع». لكن لا أحد منهما مطلق في السطر الأخير من الاستنباط أو في مقدماته الأخرى، نظرًا لأن الاستنباط الأصلي كان متناهيًا. وعليه فإن الاستنباط المنقح استنباط متناهٍ. لكنه يحتوي على ن من المتغيرات المؤشرة، وافترضنا أن مثل هذه الاستنباطات صحيحة. لذلك فإن سطرها الأخير يلزم عن مقدماتها، بما في ذلك (0). لذا يكون الشرط صحيحًا الذي يكون تاليه هو سطره الأخير ومقدمه هو وصل (0) والمقدمات الأخرى. طبّق «Λع» على هذا الشرط: ستظل النتيجة صحيحة. لكن «ع» ليست مطلقة لا في التالي ولا في أي موضع في المقدّم باستثناء في (0)، نظرا لأن الاستنباط الأصلي كان متناهيًا. لذلك، وَفقًا لقواعد تحرك الأسوار (8) و(1) من الفصل 23، يُمكننا تغيير «Λس» إلى «Vس» وجعلها تحكم فقط (0). سنحصل على التسوير الآتي:

Vس [...ع... ← Λع (...س...)]

الصحيح بموجب (13) من الفصل 28، وبالتالي يُمكن حذفه من المقدّم، مع ترك بقية الشرط صحيحًا. لذا فإن السطر الأخير من الاستنباط يلزم عن المقدمات القديمة.

لقد افترضنا أن الخطوة التي تستخدم المتغير المؤشّر والأول أبجديًا تمت بواسطة ع.ك. تسري الحجة نفسها بالنسبة إلى ت.و. وعليه تكون (0) هي «Vس (...س...) ← ...ع...» والقانون ذو الصلة في الفصل 28 هو (14). انظر إلى مدى قرب الاستدلال من إثبات الصحة في الفصل 30.

بدأنا بملاحظة أن الاستنباطات بلا متغيرات مؤشّرة صحيحة. وبعد ذلك، افترضنا أن الاستنباطات المتناهية ذات ن من متغيرات فقط سليمة،

فقد أثبتت أن المتغيرات المؤشرة ن+1 صحيحة. يُمكننا الآن أن نستنتج أن جميع الاستنباطات المتناهية صحيحة. تسمى طريقة الاستدلال هذه بالاستقراء الرياضي.

تمرين:

1. أين يعتمد إثبات السلامة على شرط مفاده: لا متغير مؤشّرٌ مرتين؟ كيف نعرف أن اعتمادنا الآن على (13) و(14) يتوافق مع الفقرة الرابعة من الصفحة 280-281؟

40 المنهجية الاستنباطية

سيكون من الملائمة الإشارة إلى الاستنباطات البسيطة الستة التالية، والتي ترمي مرة أخرى ثلاثًا من قواعد تحريك الأسوار المألوفة لدينا، من أجل توضيح منهجيات الاستنباط.

الاستنباط الأول	الاستنباط الثاني
*(1) Vسـ(ب V ك(سـ)) *(2) ب V ك(ع) (1) ع **(3) ك(ع) **(4) Vسـك(سـ) (3) *(5) ك(ع) ← Vسـك(سـ) *(4) *(6) ب V Vسـك(سـ) (5)(2)	*(1) ب V Vسـك(سـ) **(2) Vسـك(سـ) **(3) ك(ع) (2) ع *(4) Vسـك(سـ) ← ك(ع) *(3) *(5) ب V ك(ع) (4)(1) *(6) Vسـ(ب V ك(سـ)) (5)
الاستنباط الثالث	**الاستنباط الرابع**
*(1) Vسـ(ب Λ ك(سـ)) { *(2) ب (3) ك(سـ) } (1) سـ *(4) Vسـك(سـ) (3) *(5) ب Λ Vسـك(سـ) (4)(2)	{ *(1) ب (2) Vسـك(سـ) } *(3) ك(سـ) (2) سـ *(4) ب Λ ك(سـ) (3)(1) *(5) Vسـ(ب Λ ك(سـ)) (4)

الاستنباط الخامس		الاستنباط السادس	
*(1) Vسـ(ك(مـ) ← ب)		*(1) Λسـك(مـ) ← ب	
*(2) ك(سـ) ← ب	(1) مـ	**(2) ك(سـ)	
**(3) Λسـك(مـ)		**(3) Λسـك(مـ)	(2) مـ
**(4) ك(مـ)	(3)	**(4) ب	(3)(1)
**(5) ب	(4)(2)	*(5) ك(سـ) ← ب	*(4)
*(6) Λسـك(مـ) ← ب	*(5)	*(6) Vسـ(ك(مـ) ← ب)	(5)

يمكن أن تُترك العملية الواضحة لفصل الموصولات بواسطة ق.ص.ا بشكل ملائم ضمنيًا عن طريق ذكر أسطر الوصل حسب الرغبة كأزواج من الأسطر بين هلالين. وهو ما يتم في الاستنباطين 3 و4.

لاكتشاف الاستنباط المطلوب، توجد بعض المنهجيات البسيطة. عندما نبدأ بالتسوير كما في الاستنباط الأول، فإن المنهجية الواضحة تكمُن في البدء بحذف السور بواسطة ت.ك أو ت.و (مع أو بدون تغيير المتغير). على العكس من ذلك، عندما نأمل في الحصول على تسوير كنتيجة نهائية، كما هو الحال في الاستنباط الثاني، تتمثل المنهجية في محاولة استنباط الصيغة المطلوبة من دون سورها (ومع أو بدون تغيير المتغير)؛ بعد ذلك، يجوز توفير السور بواسطة ع.ك أو ع.و. إذا كنا نحاول اكتشاف الاستنباطين الأول والثاني، فإن هاتين المنهجيتين ستوفران لنا هذا القدر: (1)-(2) من الاستنباط الأول والعمل إلى الخلف، (5)-(6) من الاستنباط الثاني.

لذلك، إذا كنا نحاول وضع الاستنباط الأول، فإن المنهجية الأولية لحذف السور ستضعنا أمام مشكلة الانتقال من (2) من الاستنباط

الأول إلى (6). ثم نظرًا لأن (2) و(6) متشابهان إلى حد «ب V» ، فسيكون من الطبيعي أن نتساءل عما إذا كان الشرط الذي يربط الأجزاء المتبقية من (2) و(6)، أي إن «ك(ع) ← Vسـ ك(س)»، قد تركب مع (2) لتستلزم (6) صدقيًا. يؤكد الفحص الانتقائي الفكرة: «ب V جـ» و«جـ ← د» يستلزم في الوصل «ب V د». لذلك نعلم الآن أنه يُمكن إلحاق (6) المطلوبة بـ (2) و(5) بواسطة ق.ص.ا: تبقى المشكلة فقط في الحصول على (5). هنا تدخل منهجية للشرط في الحسبان: هب أن المقدم المرغوب مقدمة مؤقتة إضافية، حاول استنباط التالي، ثم احصل على الشرط بواسطة شا. لذلك نفترض (3)، والتي من خلالها تمضي (4) قدما دون صعوبة؛ وبالتالي يتم إنشاء الاستنباط الأول بالكامل.

إذا كنا نحاول وضع الاستنباط الثاني، فإن منهجية الأسوار ستضعنا أمام مشكلة الانتقال من (1) في الاستنباط الثاني إلى (5). إن الاستدلال الذي يحل هذه المشكلة موازٍ بالضبط لذلك المفصل في الفقرة السابقة.

يتم التحقق من اللزومات الصدقية بسهولة كافية بمجرد التفكير فيها. لكننا عندما نبني استنباطًا، يجب أن نفكر في اللزوم قبل أن يتم اختباره. توضح الطريقة التي تم بها الاستنباط الأول درسًا يجب اتباعه في كثير من الأحيان. هناك استشرنا الحس السليم لاقتراح الأسطر التي يُمكن الحصول عليها، والتي قد تنجم عنها النتيجة المرجوة (6). كان السطر (2) في المتناول، ويقترح الحس السليم السطر (5) كمكمِّل كافٍ. ثم قُمنا بفحص الاقتراح فوجدنا أن (2) و(5) يستلزمان بالوصل صدقيًا (6). وعليه تعهّدنا بالحصول على (5).

إن المنهجية الكامنة وراء اكتشاف الاستنباط الثالث واضحة. تؤدي المنهجية المعتادة للأسوار من (1) إلى (2) و(3)، مما يترك لنا مشكلة الانتقال من (2) و(3) إلى (5)، وهذه المشكلة لا تقدم إلا القليل من التحدي للبراعة.

في الاستنباط الرابع، تضعنا منهجية الأسوار أمام مشكلة الحصول على (4) من (1) و (2)، وهو أيضًا عمل لحظة.

إن المنهجية الكامنة وراء اكتشاف الاستنباط الخامس هي كما يلي. تقودنا منهجية الأسوار من (1) إلى (2)، مما يتركنا أمام مشكلة الحصول على (6) من (2). وَفقًا لمنهجية الشرط، للحصول على (6)، نفترض أن مقدمه هو (3) ونحاول استنتاج تاليه «ب». تقودنا منهجية الأسوار من (3) إلى (4)، لذلك كل ما يتبقى علينا فعله هو الحصول على «ب» بطريقة ما من الأسطر (1)-(4) التي هي الآن تحت تصرفنا. من الواضح أن (2) و(4) تحقق الغرض، عبرق.ص.ا.

تكمُن منهجية الاستنباط السادس بالأحرى في ما يلي. نظرًا لأننا نريد (6) ، فإن منهجية الأسوار توجهنا إلى التغاضي عن سورها ونهدف إلى (5). وَفقًا لمنهجية الشرط، للحصول على (5) نفترض مقدمه (2) ونحاول استنتاج تاليه «ب». لذلك كل ما يتبقى هو الحصول على «ب» بطريقة ما من (1) و(2). أما الخط الوسيط (3) فيقترح نفسه بسرعة.

يجب أن نتذكر أن قواعد الاستنباط تنطبق فقط على سطور كاملة. يعمل ت.ك وت.و على إزالة سور ما فقط إذا كان السور أوليًا في سطر ما ويعمل في السطر ككل؛ ويعمل ع.ك وع.و على إدخال سور فقط في مثل هذا الموقف. سيكون من الخطأ، على سبيل المثال ، الانتقال إلى السطر الأخير «Λسـ ك(سـ) ← ب» من الاستنباط الخامس من السطر السابق «ك(سـ) ← ب» بواسطة ع.ك، وسيكون من الخطأ الانتقال من السطر الأول «Λ سـ ك(سـ) ← ب» من الاستنباط السادس إلى السطر التالي «ك(سـ) ← ب» بواسطة ت.ك. إن العبارة «Λسـ ك(سـ) ← ب» ليست تسويرًا، بل شرطٌ يتضمّن سورًا «Λسـ ك(سـ)». ما ينجم عن «ك(سـ) ← ب» بواسطة ع.ك، ويسفر عن «ك(سـ) ← ب» بواسطة ت.ك، ليس «Λسـ ك(سـ) ← ب»، بل

«∧سـ (ك(سـ) ← ب)».

في ما يلي، دعونا نسلم بالاستدلال الخاص بالأشخاص المتشردين الوارد في بداية الفصل السابع عشر. هنا ستكون مقدماتنا ونتيجتنا كالآتي:

∧سـ (ل(سـ) ←. ك(سـ) V م(سـ))، Vسـ(ل(سـ) .∧ ~ م(سـ))،

Vسـ(ك(سـ) .∧ ~ م(سـ)).

تختزل منهجية الأسوار المشكل إلى مسألة الانتقال من «ل(سـ) ←. ك(سـ) V م(سـ)» و«ل(سـ) ∧ ~ م(سـ)» إلى «ك(سـ) ∧ ~ م(سـ)». إذا كان لحسن الحظ وصل «ل(سـ) ←. ك(سـ) V م(سـ)» و«ل(سـ) ∧ ~ م(سـ)» تستلزم صدقيًا «ك(سـ) ∧ ~ م(سـ)»، فإن استنباطنا سيكون تامًّا. لذلك نخضع:

ب ←. جـ V د : ب ∧ ~د: ← ب ∧ ~د

للتحليل الصدقي، ونكتشف أن الحظّ معنا. سنحصل بالكامل، عندئذ على:

* }	(1)	∧سـ (ل(سـ) ←. ك(سـ) V م(سـ))	
	(2)	Vسـ(ل(سـ) ∧ ~ م(سـ))	
*	(3)	ل(سـ) ←. ك(سـ) V م(سـ)	(1)
	(4)	ل(سـ) ∧ ~م(سـ)	(2) سـ
*	(5)	ك(سـ) ∧ ~م(سـ)	(4)(3)
*	(6)	Vسـ (ك(سـ) ∧ ~م(سـ))	(5)

هناك مثال أكثر جوهرية هو المثال التقليدي حول رسم الدوائر. تمت صورنة المقدمة والنتيجة في الفصل 27:

∧سـ (ك(سـ) ← ل(سـ))،

∧عـ [Vسـ (ك(سـ) .∧ م(عـ سـ)) ← Vسـ (ل(سـ) .∧ م(عـ سـ))]

تُملى الآن خطوات الاستنباط من الواحدة تلو الأخرى بشكل تلقائي تقريبًا بواسطة منهجيتي الأسوار والشرط. وحيث إن النتيجة المنشودة هي السور الكلي، فإننا نهدف أولًا إلى هذا التعبير ناقص «Vسـ». لكن هذا شرط: لذلك

نفترض مقدمه «Vسـ (ك(سـ) .٨ م(عـ سـ))» ونجرّب «Vسـ (ل(سـ) .٨ م(عـ، سـ))» كتالٍ له. ولكن للحصول على «Vسـ (ل(سـ) .٨ م(عـ سـ))» تتمثل المنهجية في محاولة استخدام «ل(سـ) .٨ م(عـ سـ)» (أو «ل(هـ) .٨ م(عـ هـ)، إلخ.)». ما يتعين علينا استنباطه من هذا هو «Λسـ (ك(سـ) ← ل(سـ))» و«Vسـ (ك(سـ) .٨ م(عـ سـ))»: لذلك فمنهجية حذف الأسوار تُؤثر على هذه، ولا يتبقى سوى القليل للخيال. هكذا يكون الاستنباط كله على النحو التالي:

*(1) Λسـ (ك(سـ) ← ل(سـ))

**(2) Vسـ (ك(سـ) .٨ م(عـ سـ))

**(3) ك(هـ) .٨ م(عـ هـ) (2) هـ

**(4) ك(هـ) ← ل(هـ) (1)

**(5) ل(هـ) .٨ م(عـ هـ) (4)(3)

**(6) Vسـ (ل(سـ) .٨ م(عـ سـ)) (5)

**(7) Vسـ (ك(سـ) .٨ م(عـ، سـ)) ← Vسـ (ل(سـ) .٨ م(عـ، سـ)) *(6)

**(8) Λعـ [Vسـ(ك(سـ) .٨ م(عـ، سـ)) ← Vسـ (ل(سـ) .٨ م(عـ، سـ))] (7) عـ

لاحظ أن التحول من «سـ» إلى «هـ» في السطر (3)، كان ضروريًا من خلال الشرط الأبجدي في ت.و. (يمكننا حذف معظم هذه التحولات عن طريق ترك ترتيب الأبجدية يختلف من استنباط إلى آخر).

بعد ذلك يوجد مثال عن اللوحات والنقاد في الفصل 27. لقد مررنا بالفعل بالاستنباط مرتين في الفصل 38. كل خطوات الاستنباط تملها منهجيتي الأسوار والشرط. دعونا نعرض الاستنباط من جديد ونُراجع بناءه.

*(1) Vعـ [ك(عـ) .∧ ∧سـ (ل(سـ) ∧ م(عـ، سـ))]

*(2) ك(عـ) } (1) ع

*(3) ∧سـ(ل(سـ) ← م(سـ، عـ))

*(4) ل(سـ) ∧ م(سـ، عـ) (3)

*(5) ل(سـ)

**(6) ك(عـ) ∧ م(سـ، عـ) (2)(4)(5)

**(7) Vعـ (ك(عـ) ∧ م(سـ، عـ)) (6)

*(8) ل(عـ) ← Vعـ (ك(عـ) ∧ م(سـ، عـ)) *(7)

*(9) ∧سـ [ل(سـ) ← Vعـ (ك(عـ) ∧ م(سـ، عـ))] (8) سـ

تصدر الأسطر (2)-(4) تلقائيًا عن منهجيتنا الخاصة بحذف الأسوار. علاوة على ذلك، بما أننا نريد (9)، فإن منهجيتنا التراجعية للأسوار توجهنا إلى استهداف (8): ومن أجل الحصول على (8) توجهنا منهجية الشرط إلى افتراض (5) ونستهدف (7). وللحصول على (7) نجرب (6)، وَفقًا للمنهجية التراجعية للأسوار. حتى الآن اكتمل الاستنباط إذا لزم حقًّا (6) عن سابقيه بواسطة ق.ص.ا. يُظهر التحليل الصدقي أو الفحص أنه يلزم عنها. ومِن ثَمَّ فإنّ اللزوم الصدقي المؤدي إلى (6) من (2) و(4) و(5) ليس بحاجة إلى التفكير فيه: إذ قدم نفسه تلقائيًا للتقييم.

في مثال الفصل 27 الخاص بالفلاسفة، يكون للمقدمة والنتيجة الصيغ الخاصة بهما كالآتي:

Vعـ [ك(عـ) .∧ ∧سـ (ك(سـ) ← ل(سـ، عـ))]،

Vسـ (ك(سـ) .∧ ل(سـ، سـ)).

تحثنا منهجياتنا الخاصة بالأسوار على اشتقاق «ك(عـ)» و«∧سـ (ك(سـ) ← ل(سـ، عـ))» من المقدمة، وأن نستهدف «ك(سـ)» و«ل(سـ، سـ)» - أو لنقل «ك(عـ)» و«ل(عـ، عـ)». كل ما يتبقى هو الحصول على «ل(عـ، عـ)»

من «ك(ع)» و«Λس (ك(س) ← ل(س ع))»، وهو أمرٌ سهلٌ. وعليه، يكون الاستنباط الكامل كالآتي:

*(1)	Vع [ك(ع) .Λ Λس (ك(س) ← ل(س ع))]	
*(2)	ك(ع)	(1) ع
*(3)	Λس (ك(س) ← ل(س ع))	
* (4)	ك(ع) ← ل(ع ع)	(3)
*(5)	ك(ع) .Λ ل(ع ع)	(2)(4)
*(6)	Vس (ك(س) .Λ ل(ع ع))	(5)

لاحظ أن تغييرات المتغيرات بين (3) و(4) وبين (5) و(6) ليست، كما في الأمثلة السابقة، مُستحثة بالقيود الموجودة في ع.ك وت.و. إنها مجرد خطوات في المسار الواضح من (2) و(3) إلى (6).

وكمثال على استنباط يستدعي المزيد من البراعة في تناول المتغيرات، دعونا نُبيِّن أن التناظر والتعدي معًا يستلزمان الانعكاسية. تكمُن مشكلتُنا في استنتاج «Λس Λع (ك(س، ع) ←. ك(س، س) Λ ك(ع، ع)) من تناظر المقدمة «Λس Λع (ك(س، ع) ← ك(ع، س)» وتعدي المقدمة «Λس Λع Λ هـ (ك(س، ع) .Λ ك(ع، هـ) .← ك(س، هـ))». تطالبنا المنهجية التراجعية بأن نستهدف «ك(س، ع) ←. ك(س، س) .Λ ك(ع، ع)»، أو ربما «ك(ظ، ف) ←. ك(ظ، ظ) .Λ ك(ف، ف)»، والحصول بعد ذلك على النتيجة المرجوة من خلال تطبيقين لـ ع.ك. نستطيع في كثير من الأحيان، في الاستنباطات التي تدرج مقدمتها خليطًا مهمًّا من المتغيرات، تجنب التضارب المحرج للمتغيرات عن طريق التحول الفوري إلى متغيرات جديدة تمامًا في منهجيتنا التراجعية: لذلك دعونا نستهدف «ك(ظ، ف) ←. ك(ظ، ظ) .Λ ك(ف، ف)». للحصول عليها، تكمُن المنهجية في افتراض «ك(ظ، ف)» وتجريب كل من «ك(ظ، ظ)» و«ك(ف، ف)». لذا تُختزل المشكلة إلى مشكلة الحصول على «ك(ظ، ظ)» و«ك(ف، ف)»

من «ك(ظ، ف)» والمقدمتين الأصليتين للتناظر والتعدي. لننتقل بعد ذلك إلى المنهجية التقدمية، فنعتبر حذف الأسوار من المقدمات؛ ولكن تبقى مشكلة اختيار المتغيرات الجديدة بالطرق المناسبة. ننصح باختيارها كـ«ظ» و«ف» حصريًا، نظرًا لأن هذه وحدها تظهر في النتائج المرغوبة «ك(ظ، ظ)» و«ك(ف، ف)» والمقدمة الوسيطة «ك(ظ، ف)». في مقدمة التناظر، تعد إعادة كتابة أحرف «ك(ظ، ف) ← ك(ف، ظ)» واعدة أكثر من «ك(ف، ظ) ← ك(ظ، ف)»، لأن مقدمتنا الوسيطة «ك(ظ، ف)» ستتحد مع «ك(ظ، ف) ← ك(ف، ظ)» لإنتاج شيء أكثر «ك(ف، ظ)» يتوافق معها. هكذا لدينا الآن «ك(ظ، ف)» و«ك(ف، ظ)» لنستمر. لذلك، إن إعادة كتابة أحرف مقدمة التعدي التي يبدو أنه يتعين علينا الاختيار بينهما، أي «ك(ظ، ف) . ٨ك(ف، ظ) .← ك(ظ، ظ)» و«ك(ف، ظ) .٨ ك(ظ، ف) .← ك(ف، ف)»، سيكون كلاهما مفيدًا، ستنتج إحداهما النتيجة المرجوة «ك(ظ، ظ)»، وستنتج الأخرى نتيجتنا المرجوة الأخرى «ك(ف، ف)». لذا، يستخدم استنباطنا مقدمة التعدي مرتين، ويعمل على النحو التالي (يخضع لتحسين لاحق):

*(1) ٨سـ٨عـ (ك(سـ، ع) ← ك(عـ، سـ))
(2) ٨سـ٨عـ٨هـ (ك(سـ، ع) . ٨ ك(عـ، هـ) .← ك(سـ، هـ))
*(3) ٨عـ (ك(ظ، ع) ← ك(عـ، ظ)) (1)
*(4) ك(ظ، ف) ← ك(ف، ظ) (3)
*(5) ٨عـ٨هـ (ك(ظ، ع) . ٨ ك(عـ، هـ) .← ك(ظ، هـ)) (2)
*(6) ٨هـ (ك(ظ، ف) . ٨ ك(ف، هـ) .← ك(ظ، هـ)) (5)
*(7) ك(ظ، ف) . ٨ ك(ف، ظ) .← ك(ظ، ظ) (6)
*(8) ٨عـ٨هـ (ك(ف، ع) . ٨ ك(عـ، هـ) .← ك(ف، هـ)) (2)
*(9) ٨هـ (ك(ف، ظ) . ٨ ك(ظ، هـ) .← ك(ف، هـ)) (8)
*(10) ك(ف، ظ) . ٨ ك(ظ، ف) .← ك(ف، ف) (9)

**(11) ك(ظ، ف)
**(12) ك(ف، ظ) (11)(4)
**(13) { ك(ظ، ظ) (11)(12)(7)
ك(ف، ف) (12)(11)(10)
*(14) ك(ظ، ف) ←. ك(ظ، ظ) ∧ ك(ف، ف) *(13)
*(15) ∧ع (ك(ظ، ع) ←. ك(ظ، ظ) ∧ ك(ع، ع)) (14) ف
*(16) ∧س∧ع (ك(س، ع) ←. ك(س، س) .∧ ك(ع، ع)) (15) ظ

بمجرد اكتشاف الاستنباط، تتم مراجعته بسهولة كافية تسمح بحذف الخطوات البَيْنِية غير الضرورية. إن امتداد الاستنباط غير المسوّر كما يظهر في الأسطر (4) و(7) و(10)-(14) ملزم أن يتضمن لزومًا صدقيًا واحدًا. خلال عملية الاكتشاف، قمنا ببناء اللزوم التدريجي، غير أنه يُمكننا الآن، بعد أن أصبحت نقاط نهايته مرئية، التحقق آليًا من أن (14) تلزم صدقيًا بشكل مباشر بواسطة وصل (4) و(7) و(10). لذا يُمكننا في واقت لاحق تحسين استنتاجنا بحذف (11)-(13) وتعليل (14) مباشرة من خلال ذكر «(4) (7) (10)». بالمناسبة، وبغرض التكثيف قد نحذف (8)-(9) ونكتب فقط «على المنوال نفسه» بعد (10).

يمكن تقدير ميزة كوننا استهدفنا (14)، في صيغة «ك(ظ، ف) ←. ك(ظ، ظ) .∧ ك(ف، ف)» وليس في الصيغة «ك(س، ع) ←. ك(س، س) .∧ ك(ع، ع)»، عن طريق إعادة كتابة الاستنباط أعلاه بـ «س» و«ع» بدلًا من «ظ» و«ف» في كل مكان. يُمكن أن نواجه صعوبة تبرز في (8).

يمكن إعادة إحياء برهان الخلف، التي تقوم عليه الطريقة الرئيسة، بشكل مفيد حيث تفشل المنهجيات الأخرى. إنه يتلخص في افتراض نقيض ما سيتم إثباته ثم البحث عن المعضلة. يُمكن توضيحه من خلال استنباط «ـ Vس ك(س)» من «∧س ـك(س)»:

*(1) Λسـ ¬ك(سـ)
*(2) ¬ك(سـ) (1)
**(3) Vسـ ك(سـ)
**(4) ك(سـ) (3) سـ
(5) Vسـ ك(سـ) ← ك(سـ) (4)
*(6) ¬Vسـ ك(سـ) (2)(5)

هنا تقودنا المنهجية المعتادة للأسوار من (1) إلى (2). مما يتركنا أمام مشكلة الانتقال من هناك إلى (6). وباللجوء إلى برهان الخلف، نفترض تناقض السطر (6) المطلوب باعتباره (3). ومن ثم ننتقل بواسطة منهجية الأسوار إلى (4)، فنكتشف المعضلة التي كنا نبحث عنها؛ لأن (4) يتعارض مع (2). هكذا تقود شا وق.ص.ا إلى (6) عبر (5).

توجد منهجية تكميلية جديرة بالملاحظة هي تلك الخاصة بمعضلة (الإحراج (dilemma))، وهي مفيدة في الحصول على نتيجة من الفصل. استنتج أولًا النتيجة المرغوبة بشكل منفصل عن كل مكوِّن من مكونات الفصل، واشتقّ شرطًا في كل حالة بواسطة شا؛ ثم استنتج من هذه الشروط والفصل الأصلي النتيجة بواسطة ق.ص.ا. راجع الصفحة 377-378.

تمارين

1. في تماثل دقيق مع آخر استنباط عرضناه، استنتج «¬Λسـ ك(سـ)» من «Vسـ ¬ك(سـ)».
2. قم بالبت في قواعد تحرك الأسوار، وهي (2) و(4) و(5) و(6) و(8) من الفصل 23، عن طريق أزواج من الاستنباطات.
3. قم بالبت، عن طريق استنباط الأقيسة في الفصل 16 بما في ذلك القياس المُقوّى الخاص بالإسبارطيين. اتخذ نموذجًا: الاستنباط أعلاه

الخاص بالأشخاص المشردين.

4. قم بالأمر نفسه في ما يخص الاستدلال الشهود، الوارد في منتصف الفصل 17.

5. استنتج «Vسـ ~ك(سـ)» من «~Λسـ ك(سـ)». خطط للحصول على السطر الوسيط الآتي:

* (4)	ك(سـ) ← Λسـ ك(سـ)	(3)*

وبالمثل، استنبط «Λسـ ~ك(سـ)» من «~Vسـ ك(سـ)».

6. أثبت تكافؤ «Λسـ(ب Λ ك(سـ) ← ك(سـ)» مع «ب» عن طريق الاستنباط المتبادل. مفتاح الحل: «ب» تستلزم صدقيًا «ب .Λ ك(سـ) ← ك(سـ)».

7. أثبت تكافؤ «Vسـ(ب .Λ ك(سـ) ← ك(سـ)» مع «ب».

8. في ما يلي مقتطفات من حل استنباطي للتمرين 4 من الفصل 25. أكمله.

* (3)	ل(سـ) ← م(سـ)	(1)	
** (4)	Vسـ(ك(سـ) .Λ ل(سـ))		
** (5)	ك(سـ) .Λ ل(سـ)	(4)	سـ
*** (7)	Λسـ(م(سـ) ← ~ن(سـ))	(6)	ع
** (10)	م(ع) ← ~ن(ع) .←. ك(سـ) ← ~م(سـ)	*(9)	
** (11)	م(ع) .Λ ن(ع)	(10)(5)(3)	

9. أثبت الاستدلال الخاص بفئة 00′، الوارد نهاية الفصل 17. تحذير: إن هذا الاستنباط مغامرة طويلة. لا واحد من اللزومات الصدقية المتضمَّنَة هائلة مثل تلك التي تؤدي إلى (11) في التمرين السابق، لكن الاستنباط يمتد 18 سطرًا (في صيغتي على أي حال)، بعضها لا يأتي بسهولة. إنه يميل إلى زيادة تقدير المرء للحل في الفصل 19.

10. استنتج «ك(عـ ع)» من «Λسـ ك(سـ ع) V Λسـ ك(عـ سـ)»، باتباع منهجية الإحراج. ⌊

الباب الرابع

رؤى مستقبلية

41 الحدود الشخصية

لقد أصبح الآن منطق الدوال الصدقية والتسوير في متناولنا. بَيْدَ أنَّ بعض الأنماط البسيطة للاستدلال تتطلب مزيدًا من المناقشة،خصوصًا تلك التي تتضمّن حدودًا شخصية نحو«سقراط»:

كل إنسان فان،	سقراط إغريقي،
سقراط إنسان،	سقراط حكيم،
\ سقراط فان	\ بعض الإغريقيين حكماء

ومن جهة أخرى، لم نتناول بما فيه الكفاية نظرية الهُويَّة بقوانين بديهية من قبيل «س= س» و«س= ص ↔. ص= س». تكفي بعض الفصول لإنصاف الحدود الشخصية والهُوِيّة. ستكون هناك رحلة قصيرة اختبارية في شيء يسمى العوامل (functors)، وعلى سبيل الختم، سنلقي نظرة موجزة على نظرية المجموعات، أو نظرية الفئات- مجال يُمكن أن يتميز بكونه في الوقت نفسه جزءًا متقدمًا من المنطق والحقل المعرفي الأساسي للرياضيات الكلاسيكية.

إن ما أسميناه «حدودًا» في الفصلين 14 و27، والتي نرمز إليها بـ«ك» و«ل»، إلخ، حدودٌ كلية، في مقابل الحدود الشخصية. غير أنه لا ينبغي أن نخلط العموم بالالتباس. فالحد الشخصي «جونز» ملتبس من حيث قابليته للاستعمال في سياقات متباينة لتسمية أي شخص من بين العديد من الأشخاص، غير أنه يظل حدًّا شخصيًّا من حيث كونه يفترض، في سياق

مخصوص، أن يسمي شخصًا واحدًا وواحدًا فقط. ويصدق الشيء نفسه على الضمائر «أنا»، و«أنت»، إذ يتعلق الأمر من جديد بالحدود الشخصية، بَيْدَ أن الالتباس فيها يكون أقصى في انتظار التحديد بواسطة السياق والظروف الأخرى التي تُصاحب كل استعمال من استعمالاتها. ويسري الأمر نفسه على «إنسان»، أو بشكل أوضح، «الرئيس» أو «السرداب»: إن هذه التعبيرات (بخلاف «إنسان» و«رئيس» و«سرداب» نفسها) حدود شخصية، غير أن الموضوع الفريد الذي يفترض أن تعيِّنه في كل استعمال من استعمالاتها يتوقف تحديده على ظروف ملازمة.

بجانب تصنيف الحدود إلى شخصية وكلية، هناك تصنيف آخر، يقسمها إلى حدود محسوسة ومجرَّدة: فالحدود المحسوسة هي تلك التي يفترض أن تعيّن الأفراد، والمواضيع الفيزيائية، والوقائع؛ أما الحدود المجردة فهي تلك التي يفترض أن تعيِّن مواضيع مجردة،كالأعداد والفئات والصفات. هكذا تكون بعض الحدود الشخصية من قبيل «سقراط» و«عنقاء» و«أرض»، و«كاتب ويفيرلي»، حدودًا محسوسة، في حين أن حدودًا أخرى شخصية مثل «7»، و«3+4»، و«العفة» حدود مجردة. ومن ناحيتها، تكون بعض الحدود كلية، مثل «إنسان»، و«منزل» و«منزل أحمر» حدودًا محسوسة (لأن كل إنسان وكل منزل عبارة عن فرد محسوس)؛ في حين أن حدودًا أخرى من قبيل «عدد أولي» و«نوع حيواني» و«فضيلة» حدود مجردة (لأن كل عدد في ذاته موضوع مجرد، إذا كان شيئًا ما، وبالمثل كل نوع وكل فضيلة).

عندئذ يصبح الحذر مطلوبًا في حديثنا عن مجردات الحدود التي اعتدنا عليها؛ لأن مجرد الحد قد يكون أو لا يكون حدًّا مجردًا. إن الحد المجرد حد كلي، وحد مجرد فقط إذا كانت المواضيع العديدة التي يصدق عليها مجردة. في الفصل 46، سنتأمل بالفعل في الخطوة الجريئة المتمثلة في السماح للحدود الكلية بأداء مهمة مزدوجة باعتبارها أسماء لماصدقاتها، وبالتالي

ترك الحدود المجردة تعمل كحدود شخصية مجردة، ولكن فقط على قدم المساواة مع الحدود الكلية الأخرى.

إن تقسيم الحدود إلى محسوسة ومجردة هو تمييز فقط بين أنواع المواضيع التي يعيّنها؛ والتمييز بين الحدود الشخصية والحدود الكلية أكثر حيوية من الناحية المنطقية. لم نثبته إلى حدِّ الآن إلا بطريقة جد فضفاضة: يكون الحدّ شخصيًا عندما يفترض أن يسمّي موضوعًا (واحدًا وواحدًا فقط)، وإلا يكون كُلِّيًا. لنقف عند الكلمة المفتاح «يفترض»: فهي تفصل المسألة عن مسائل الواقع من قبيل وجود سقراط والعنقاء. إن كون الكلمة يفترض أن تسمّي موضوعًا واحدًا ووحيدًا، مسألة لغوية، في استقلال تام عن واقع الوجود.

عندما نقول إن حدًا شخصيًا «يفترض أن يسمّي موضوعًا واحدًا ووحيدًا» فهذا لا يعني شيئًا آخر، بلغة البنية المنطقية، سوى ما يلي: يظهر الحد الشخصي في مواقع بحيث يكون من الملائم أن نستعمل أيضًا المتغيرات «س»، «ص»، إلخ. (أو ضمائر اللغة العادية) وتكون سياقات من النوع:

سقراط حكيم،	العفة فضيلة
تحرس العنقاء الباب،	3 + 4 = 7

إلخ، موازية لصيغة العبارات المهملة الآتية:

س حكيم، س يحرس الباب، س فضيلة، س = 3+4

والتي يُمكن أن ترد في العبارات المحصورة التي لها صيغة مسورة: «Vس (س حكيم)»، إلخ. باختصار شديد، تكون الحدود «سقراط» و«العنقاء» و«العفة»، و«7»، قابلة للإنابة بمتغيرات في العبارات المهملة دون أيّ تعسّف على النحو؛ وهذا هو ما يجعل منها حدودًا شخصية. إن معرفة ما إذا كان يوجد حقًا موضوع من قبيل سقراط (الذي يوجد دون مؤشر

زمني) أو العنقاء (التي لا توجد) أو العفة أو 7 (التي لا يتفق بخصوصهما الفلاسفة) مسألة بالطبع مختلفة.

لا تظهر الحدود الكلية، بخلاف الحدود الشخصية، في المواضع التي تناسب المتغيرات. تظهر المواضع النموذجية للحد الكلي «إنسان» في «سقراط إنسان»، وفي «كل الناس فانون»؛ فإذا كتبت بهذا الشكل:

(1) سقراط سـ كل سـ فان،

لن يكون لها أيّ معنى. ولا يكون حالها أفضل عندما نضع مثل هذه العبارات في تسويرات من هذا القبيل:

(2) V سـ (سقراط سـ)،

(3) Λسـ (كل سـ فان ← سقراط فان).

يمكن لـ «سـ» في العبارة المهملة أن يعيّن مواضيع من أيّ نوع، غير أنه من المفروض ألاّ يعيّن إلا واحدًا كل مرة. ويدلّ تطبيق «Λسـ» أو «V سـ»، إذًا، على أن ما تقوله العبارة المهملة عن سـ يصدق على كل المواضيع أو على بعضها مأخوذة واحدًا واحدًا.

توجد، في الحقيقة، عبارات مهملة مشروعة شبيهة إلى حد كبير بـ (1) لكنها مصوغة بلغة الانتماء إلى فئة، نحو:

(4) سقراط عنصر في سـ، كل عناصر سـ فانون.

بَيْد أنّ هذه العبارات، بخلاف (1)، لا تعرِض «سـ» باعتباره حدًّا كليًّا مثل «إنسان»، بل تقدمه بالأحرى مكانَ حدٍّ شخصيٍّ مجرد، «النوع الإنساني» («فئة كل الناس») كما في «سقراط عنصر من فئة النوع الإنساني»، و«كل عناصر النوع الإنساني فانون». ويمكن أن تصاغ العبارتان المهملتان (4) فتظهران بشكل صحيح تمامًا في التسويرين:

(5) Vسـ (سقراط عنصر في سـ)،

(6) Λسـ (كل عناصر سـ فانون ← سقراط فان).

وبهذه المناسبة، بإمكاننا أن ندفع بتحليل (6) إلى أبعد من ذلك:

(7) ∧سـ [∧صـ (صـ عنصر في سـ ← صـ فان) ← سقراط فان]

باعتبارها بديلًا لـ (4) يُمكن أن نعتمد كذلك على صفات بدل الفئات كما يلي:

(8) يتصف سقراط بـ سـ، وكل شيء يتصف بـ سـ فهو فان.

يظهر هنا «سـ» في موضع حدّ شخصي مجرد نحو «إنسانية» الذي يفترض أن يسمّي صفة. ويمكن لتسويرات مماثلة لـ (5)-(7) أن تبنى في ما بعد انطلاقًا من (8).

مثلما أن أحرف العبارات تكون داخل صيغة بمثابة قطع بديلة عن العبارات وأحرف الحدود قطع بديلة عن الحدود، كذلك تكون المتغيرات المطلقة بمثابة قطع بديلة عن الحدود الشخصية. ونحن محقُّون بالتالي، عندما نريد أن نعبّر صوريًّا عن الاستدلالات السابقة المتعلقة بسقراط، إذ يُمكن أن نستعمل «صـ» مطلق فقط للتعبير عن «سقراط». عندئذ تكون استدلالاتنا مستساغة بشكل مباشر بواسطة شرطين صحيحين:

∧سـ (ك(سـ) ← ل(سـ)) . ∧ ك(صـ) . ← ل(صـ)،

ك(صـ) . ∧ ل(صـ) .← V سـ (ك(سـ) . ∧ ل(سـ)).

مثال آخر:

مقدمتان:

قدم ألدريتش رشوة لكل أعضاء اللجنة،

بار عضو في اللجنة؛

النتيجة:

شخص ما قدم رشوة لبار.

يعلِّل هذا الاستدلال صحة الشرط الآتي:

∧سـ (ك(سـ) ← ل(هـ، سـ) . ∧ ك(ف) . ← Vسـ ل(هـ، ف)،

الذي يتحول إلى صيغة وجودية خالصة ويتم التحقق منه بسرعة.

وتبين هذه الشرطيات الصحيحة أن النتائج ستكون صادقة إذا صدقت المقدمات، كيفما كانت مواضيع مجال القول الذي نختاره كتأويل لـ «صه» و«هـ» و«ف». وبذلك نستطيع أن نختار على وجه الخصوص سقراط وجونز وبار شريطة أن يشمل مجال القول ببساطة حقًّا هذه الأشياء.

ذلك أن هذا الاشتراط ضروري للتطبيق المتوخّى لنتائجنا الاستنباطية. فالحد الشخصي يسمّي أو لا يسمي موضوعًا. والحد الشخصي يُفتَرَض أن يسمي موضوعًا ما، بيد أنه بلا سلطة بتاتًا تضمن أن الموضوع المفترض سيحضُر على الإطلاق: مثال ذلك «العنقاء». وتلائم التقنيات الاستنباطية لنظرية التسوير ذات المتغيرات المطلقة تمامًا الاستدلالات المتوقفة على الحدود الشخصية في كل مرة نكون فيها واثقين من وجود مواضيع تشبه تلك التي يفترض أن تسمّيها تلك الحدود؛ وبذلك يغدو سؤال الوجود سؤالًا مركزيًّا بمجرد ما يتعلق الأمر بالحدود الشخصية.

لن أحتاج إلى استعمال المعنى الضيق الذي منحه بعض الفلاسفة لـ «الوجود (existence)» في مقابل «الكينونة (being)»، أي الحضور العيني في المكان والزمان. فإذا حضر معنى ثان من هذا النوع ليهدد في الصفحات الموالية بحيث نتصور أن «يوجد (exist)» تُبدَّل بـ«هو (is)»[1] فعندما نقول عن «بارثينون» و«العدد 7» إنهما يوجدان، فلا حاجة إلى تمييز معنى «يوجدان». فالبارثينون موجود بالفعل كموضوع متواجد في المكان والزمان، بينما العدد 7 (إذا وجدت) نوع آخر من الأشياء؛ غير أن الفرق هنا يوجد بين المواضيع المعنية، وليس بين معانٍ مختلفة لـ «يوجد».

وبخلاف 7 والبارثينون، لا يوجد بتاتًا أي شيء مثل العنقاء؛ ولا يوجد

(1) يتعلق الأمر هنا بالرابطة (copula) التي تمكّن من إسناد المحمول (الخبر) إلى الموضوع (المبتدأ) في اللغات الهندوأوروبية واليونانية. والتي لا توجد في اللغة العربية لا ظاهرة ولا مضمرة. وقد عمد المترجمون العرب القدامى للكتب المنطقية اليونانية إلى استعمال «هو» وأشباهها بدل «is» وشبيهاتها. [المترجم]

أي عدد من قبيل 0/0. الظاهر أن ما ننكره لا يتوقف على أي حصر للوجود في الزمكان. إن معنى الكلمة الخاصة «العنقاء» يحصل أن يصدق متى كانت هذه الكلمة تُسمّي موضوعًا ما، يكون هذا الموضوع موضوعًا فيزيائيًّا في المكان والزمان. من هذه الناحية، إن كلمة «العنقاء» مثل «البارثينون» و«بوسيفالوس»، لكنها تختلف عن «7» و0/0. غير أن «العنقاء» تختلف أيضًا عن «البارثينون» وعن «بوسيفالوس» بما يلي: في الوقت الذي يوجد فيه شيء في الزمكان يستجيب لما يفترض أن نسميه بكلمة «البارثينون» (أي ما كان موجودًا بأثينا منذ ما يقارب اثني عشر قرنًا بما في ذلك جزء من القرن العشرين أو بأكمله)، وفي الوقت الذي من المحتمل أن يوجد فيه شيء، (دون أي ذكر للزمن) في المكان والزمان يستجيب لما يفترض أن تسميه الكلمة «بوسيفالوس» (أي مواقع متوالية من الشرق الأدنى والأوسط في القرن الرابع قبل الميلاد)، يتبين في المقابل أنه لا يوجد، أي شيء -قريب أو بعيد، في الماضي أو الحاضر أو المستقبل- يستجيب لما يفترض أن تسميه كلمة «العنقاء».

لا شك، أنه من الشائع أن الحدود الشخصية يُمكن ألا تسمي شيئا على الإطلاق، وإن كان يفترض أن تسمّي. فـ العنقاء» مثال على ذلك، و«0/0» مثال آخر. غير أن التجربة تبين أيضًا أن الاعتراف به، مهما كان الشائع، يبقى مليئا بالالتباسات الدائمة، على حساب فهم واضح لمنطق الحدود الشخصية. فلتكن مهمتنا إذًا، في ما تبقى من هذا الفصل، تبديد بعض هذه الالتباسات.

هناك نزوع إلى محاولة الحفاظ تحت كلمة «عنقاء»، مثلًا، على كائن (entity) غامض، مخافة أن تفقد الكلمة مدلولها. ومتى لم تكن لكلمة «العنقاء» دلالة، لن يتأثر بذلك الشعر وحده، بل حتى بعض العبارات التي تعبر عن وقائع، من قبيل القول بعدم وجود أي شيء ندعوه «عنقاء»،

ستقع هي الأخرى في اللغو. فقد يعرِض لنا أن نسمع بأن «العنقاء» موجودة مثلًا كفكرة في الأذهان. غير أن هذه المناورة اللفظية لن توصل سوى إلى الالتباس. فعندما نثبت، بخصوص موضوع ملموس كالبارثينون، حتى نغير المثال للحظة، بأنه يتوفر على وجود مزدوج: في أثينا وفي الأذهان، لن يكون ذلك سوى تعتيم محض. من المستبعد أن نقبل موضوعين (أو أكثر): البارثينون الملموس الموجود بأثينا وفكرة البارثينون الموجودة في الأذهان (أو فكرة البارثينون الموجودة في مختلف الأذهان). يسمّي «البارثينون» البارثينون وفقط البارثينون، في حين أن «فكرة البارثينون» تسمّي فكرة البارثينون. وبالمثل ليست «العنقاء»، بل «فكرة العنقاء» هي التي تسمّي فكرة العنقاء، في حين أن «العنقاء» تصادف ألا تسمي أي شيء.

ليس هذا موضع محاولة قول ما هي الفكرة، أو ما يعنيه الوجود في الأذهان. ربما ينبغي، من وجهة النظر السيكولوجية التجريبية، أن تفسَّر الفكرة بطريقة ما باعتبارها ميلًا إلى بعض أنماط (patterns) رد الفعل حيال الألفاظ أو مثيرات أخرى خاصة؛ وبذلك ربما يدل «الوجود في الأذهان» ببساطة على «أن تكون فكرة». بيد أن الأهم لا يكمُن هنا؛ ففكرة «الفكرة» لم تقبل هنا إلا كتنازل عن الجزء الآخر. تكمُن النقطة الأساسية في أنه رغم حريتنا القصوى في تلقي أفكار وموضوعات أخرى غير مادية، فإن مماثلة البارثينون بفكرة البارثينون تعود ببساطة إلى خلط شيء بآخر؛ وأن نحاول التأكد من وجود شيء كالعنقاء بمماثلتها بفكرة العنقاء، لهو سقوط في خلط مشابه لسابقه.

إن محاولة الحفاظ على مدلول «العنقاء» بتقديم كائن غامض تكون «العنقاء» اسمًا له لهو أمر مستلهم بشكل سيئ. فـ «العنقاء» تظل ذات مدلول وإن لم تُسمِّ شيئًا. وأغلب الألفاظ، مثل «و» أو «لأجل»، لها دلالة دون أن يفترض أن تسمّي أبدًا شيئًا ما. وحتى عندما تكون كلمة ما اسمًا

لشيء ما، فإن مدلولها لا يبدو، عادة، أنه يماثل الشيء المسمّى[1]. لقد كان جبل إيفيرست (Everest) معروفًا، من وجهتي نظر متعارضتين: إيفيريست وتشومولونغما (Chomolungma)[2] معًا، فهنا الشيء المسمّى كان دائمًا شيئًا واحدًا، ومع ذلك لا يُمكن أن نعتبر الاسمين متماثلين في الدلالة أو مترادفين؛ فلا اختبار مباشرًا لأذهان أولئك الذين يتسلقون «إيفريست» و«تشومولونغما» يُمكن أن يظهر لنا، بشكل سابق على ملاحظة مضنية للطبيعة، أنهم يسمّون الشيء نفسه. وهناك أيضًا مثال فريغه بخصوص «نجمة المساء» و«نجمة الصباح»: فالكوكب المسمّى واحد، لكن لإثبات ذلك نحتاج إلى علم الفلك وليس إلى تحليل بسيط للدلالات.

تعتبر الصياغة الدقيقة والكافية لمفهوم الدلالة من بين المسائل التي لم تعرف حلًا في مجال الدلاليات. قد تكمُن الطريقة الأمثل لتفسير الدلالة في تمثلها كفكرة متداعية، بمعنى أنها «فكرة» تتطلب بدورها أن تُدقّق؛ أو كنسق من القواعد الضمنية التي تستعمل فيها الكلمة، مع افتراض إمكان صوغ معيار لـ «قاعدة ضمنية» تكون انتقائية بما فيه الكفاية بحيث تقبل تماثل دلالة تعابير متباينة؛ ولربما بتعبير أصح، تكمُن المعالجة التي سيتبين أنها الأحسن، في أن نرفض أن نعتبر ما يسمى بالدلالات كائنات؛ فتعبيرات من قبيل «له دلالة»، أو «تماثل الدلالة» ينبغي أن تحذف لفائدة «دالّ» و«مرادف»، على أمل أن نصوغ في النهاية بالنسبة إلى الدلالة والترادف معايير مطابقة تلغي كل لجوء إلى مملكة كائنات وسيطة نسميها الدلالات. ولربما سنكتشف أنه من بين هذين التعبيرين يكون التعبير «له دلالة» وحده الذي يقبل معيارًا كافيًا، وأن كل مجهود لإعطاء معنًى لـ «يرادف» يجب أن

(1) ناقش فريغه بشكل دقيق هذه النقطة التي تعرضت لإهمال كبير في مقاله: «حول المعنى والإحالة» («Über Sinn Und Bedeutung»).

(2) إروين شرويدينغر (Erwin Schrödinger)، ما هي الحياة (*?What is Life*)؟ الفقرة الأخيرة.

نتخلى عنه تمامًا مثلما أن نتخلى عن مفهوم الدلالة[1]. ومهما يكن من أمر، فإن النقطة التي تهمنا حاليًّا هي أن دلالة كلمة ما، بما في ذلك معنى كلمة (من قبيل «العنقاء») التي يفترض أن تكون اسمًا، لا تتوقف البتة على كون هذه الكلمة تسمّي شيئًا ما، وحتى لو كانت كلمة ما تُسمّى موضوعًا، وقبلنا بوجود كائنات نسمّيها الدلالات، فلاشيء يضطرنا إلى اعتبار أن الموضوع المسمّى هو الدلالة.

إن الفكرة المغلوطة التي تفيد أن كلمة «العنقاء» يجب أن تسمّي شيئا ما حتى يكون لها حقًّا دلالة، إنما تقوم، كما اقترحنا ذلك قبل قليل، على الخلط بين التسمية والدلالة. غير أن ما يقوّي هذه الفكرة أيضًا هو عامل آخر يتمثل في كوننا اعتدنا التفكير تبعًا لهذه الكلمة الخادعة «عن». فإذا لم يكن يوجد أي شيء من قبيل العنقاء، فإننا نسأل عَمَّ تتكلم إذًا عندما تستعمل كلمة «العنقاء» (حتى ولو استعملتها لكي تقول إنه لا يوجد شيء من هذا القبيل)؟ الواقع أن هذا النوع من الاحتجاج يُمكن أن يُعرَف تصعيدًا بالقوة نفسها (أي لاشيء) في مناسبات لا حصر لها حيث لا يتدخل حتى ما ندعوه اسمًا نحو «العنقاء»: عمَّ تتكلم إذًا عندما تقول إنه لا توجد أية سفينة حربية بوليفية؟ يكمُن العلاج في هذه الحالة في أن نتخلى، ببساطة، عن الرأي الذي لا مسوّغ له والذي مفاده بأننا لا نتكلم بمعنًى إلا عندما توجد دائمًا أشياء نتكلم عنها. ولهذا الرأي أصله، بلا شك، في خلط مماثل جوهريًّا لما أتينا على إنكاره توا؛ فهناك كان الخلط حاصلًا بين الدلالات والمواضيع المسمّاة، وهنا يحصل الخلط بين الدلالات والأشياء التي نتكلم عنها.

---

(1) انظر كتابنا:

From a Logical Point of View, Essais II and III.

من وجهة نظر منطقية. تسع مقالات منطقية وفلسفية، (ترجمة وتقديم يوسف تيبس، دار توبقال للنشر، 2010) الفصلان الثاني والثالث.

يثير هذا الرأي المغلوط الذي مفاده أن «العنقاء» ينبغي أن تُسمّي شيئًا ما تقتضي، كما رأينا، محاولة تافهة لتوفير موضوع مسمّى، أي الاعتقاد في أن العنقاء شيء ما يوجد في الأذهان. إننا نصادف كثيرًا حيَلًا تصلح للغاية نفسها. والشاهد على ذلك المذهب النسبي، الذي يزعم أن العنقاء توجد في عالم الأساطير اليونانية وليس في مجال العلم المعاصر. وهذه ليست سوى طريقة متعسفة للقول بأن اليونانيين كانوا يعتقدون في وجود العنقاء وأنهم بذلك (إذا كنا على الأقل نستطيع أن نثق بالعلم المعاصر) كانوا مخطئين. إن للأساطير التي تثبت وجود العنقاء قيمة جمالية ومعنًى إنتروبولوجيًا؛ علاوة على أنها تتوفر على بنيات داخلية نستطيع أن نطبق عليها تقنياتنا المنطقية المألوفة؛ إلا أن الأساطير كاذبة تمامًا، وأنه لمن التعتيم الخالص أن نعبّر عن الأمر بشكل مغاير. لا يوجد في الواقع سوى عالم واحد، إذ لا يوجد، ولم يوجد البتة، ولن يوجد على الإطلاق أي شيء من قبيل العنقاء.

هناك حيلة أخرى من النوع نفسه لا ينبغي أن نبطئ في تناولها ولو من أجل الخروج من الجدل الميتافيزيقي الذي تقحمنا فيه إذا كان علينا أن نتباطأ؛ تكمُن هذه الحيلة في الفكرة القائلة بكون الأفراد المحسوسين صنفين: الأفراد المتحققين والأفراد الممكنين غير المتحققين. والعنقاء تدخل ضمن الصنف الأخير وَفقًا لهذا التصور: بحيث نظن أنه يوجد، فعلًا، شيء من قبيل عنقاء، وأن المضمون الخاص لنفيه يعبر عنه بشكل صحيح بالصيغة «العنقاء غير متحققة». هكذا يغدو العالم بالمعنى الواسع، وَفقًا لهذا التصور، مأهولًا بشكل مفرط. لكن عزاء هذا التصور يكمُن في افتراض أن شيئًا من قبيل العنقاء يأتي للوجود [يَنوجِدُ] بحيث يُمكن القول إننا نتكلم عنه في كل مرّة نقول فيها حقًّا (عوض أن نقول «لا يوجد أي شيء من قبيل العنقاء») إن «العنقاء ليست متحققة».

غير أن هذه الحيلة تتوقف على إمكانية العنقاء: إنها تكفّ عن أن

تنطبق إذا ما غيرنا المثال من العنقاء إلى اسم مزعوم ذي صيغة معقدة تتضمن إمكانية مطلقة، مثلًا، «الهرم الإهليلجي لكوبيلكو (Copilco)». وبما أننا عمّرنا العالم فعلًا بحصّة أقل معقولية من الممكنات غير المتحققة، فهل سنتمادى ونزيد على ذلك مملكة من المستحيلات غير المتحققة؟ في هذه النقطة نميل إلى اختيار القرن الآخر من الإحراج المفترض، فنُقرّر بأن العبارات التي تنطوي على الاستحالة عبارات لا معنى لها. ومن ثَمَّ، ربما تكون الفكرة الشائعة القائلة بأنَّ العبارة غير المتسقة منطقيًا في شكلها يجب إعادة تصنيفها باعتبارها عبارة خالية من المعنى: ليست خاطئة، بل لا معنى لها. يُعتبَر هذا المفهوم، إلى جانب كونه غير طبيعي في ظاهره، غير عملي لأنه يستبعد إمكانية اختبارات المعنى؛ نظرًا لأن الاتساق المنطقي لا يسمح بأي اختبار عام، ولا حتى بإجراء برهنة تامة (انظر الفصل 34).

كل هذا التراكم من الحيل، في ظل الفكرة القاضية بأن العبارات يجب أن تسمّي شيئًا حتى تكون لها دلالة، لا مسوّغ لها بتاتًا. فلا طائل من وراء صنع الأعاجيب بخصوص إسناد عدم الوجود حينما لا يوجد شيء نسنده إليه، ولا جدوى كذلك من أن نتخوّف بخصوص الخاصية الدلالية للكلمات التي يفترض أن تسمّي وتفشل في ذلك. إن كونها يفترض أن تسمّي فلا تفلح في ذلك دليل فعلي على تشارك تام للدلالة.

وفي الحالة التي يكون فيها الاعتراف بالممكنات غير المتحققة مطلوبًا لأسباب أخرى، لا يوجد شيء ما في النظرية المنطقية المستقبلة يمنع بالضرورة هذا الخيار ما دامت الفروقات الأساسية محفوظة. إن ما نسمّيه الأفكار الذهنية والدلالات قد سُمح بها مؤقتًا في الفقرات السابقة، وقد نسمح كذلك باستيعاب «الأفكار» من النوع الأفلاطوني الذي يتضمن الممكنات غير المتحققة. يجب أن نلح ببساطة على أن هذه الكائنات الغامضة، متى سلمنا بها، ينبغي أن تسمّى بأسلوب جد مُتميز: «إمكان

العنقاء»، أو «فكرة العنقاء»، أو «دلالة العنقاء». فإذا تمكّنّا من الاتفاق حول هذه النقطة الهامة بالمواضعة، يُمكن ترك كل واحد لميتافيزيقاه المفضلة كلما تعلق الأمر بأي شيء آخر[1]. إن الرسالة الأساسية التي نود تبليغها من هذا الفصل إلى الفصول اللاحقة هي ببساطة كالآتي: إن بعض الكلمات الدالة، والتي تعتبر من الناحية النحوية أسماء علم ونخص هنا بالذكر «العنقاء»، لا تسمّي شيئًا[2].

تمارين:

1. بيّن أن المقدمتين:

لم يساهم باروويليامس معًا

إذا ساهم بليك فالكل قد ساهم

تستلزمان النتيجة:

لم يساهم بليك.

مع السماح للمتغيرات المطلقة بأن تحل محل مواقع أسماء العلم.

2. بيّن أن المقدمتين:

تحسد إديث كل أولئك الذين هم أغنى منها

ليس هيربيرت أكثر غنًى من كل أولئك الذين يحسدونه

تستلزمان النتيجة:

ليس هيربيرت أكثر غنى من إديث.

---

(1) الخط المضغوط من عندنا لأن هذه العبارة تلخص تصور كواين للميتافزيقا (الالتزام الأنطلوجي)، وتحيل على هذا التصور الوارد في كتبه الأخرى وخصوصًا من وجهة نظر منطقية. [المترجم]

(2) للاطلاع على تفاصيل أكثر تخصّ هذا الموضوع، انظر مقال راسل: «حول الإحالة»
B. Russell, « On Denoting »
وكتابي: من وجهة نظر منطقية، الفصلين الأول والسادس.
From a Logical Point of View, Essais I and VI.

42 الهُويّة

تعتبر الهُويّة فكرة من البساطة والأهمية بحيث يصعب أن نفسرها بطريقة ما لم نعمد إلى مرادفات بسيطة. عندما نقول إن سوء متماثلان فإننا نقول إنهما شيء واحد. وكل شيء يماثل ذاته ولاشيء غيره. غير أنه على الرغم من هذه البساطة، فإن الهُويّة تحتمل الالتباس. نتساءل مثلًا: ماذا عساه يكون استعمال مفهوم الهُويّة إذا كانت مماثلة موضوع ما لنفسه مبتذلة، وإذا كانت مماثلته لشيء آخر كاذبة؟

ويتضح هذا الالتباس بوضوح إذا ما فكرنا في أنه في الواقع لا يوجد نوعان فقط من الحالات ينبغي اعتبارهما، أحدهما مبتذل والآخر كاذب، بل توجد ثلاث حالات:

شيشرون = شيشرون، شيشرون = كاتيلينا، شيشرون = طوليوس.

إن الحالة الأولى مبتذلة، والثانية كاذبة، لكن الثالثة ليست مبتذلة ولا كاذبة، إذ تزودنا بمعلومة تجمع بين حدّين مختلفين؛ وهي في الوقت نفسه صادقة، لأنّ الحدين عبارة عن اسمين لموضوع واحد. وحتى يصدق ملفوظ يعبر عن الهُويّة يكفي أن تظهر «=» بين اسمين يسميان الموضوع نفسه، ويمكن للأسماء ذاتها، وفي الحالات المفيدة، أن تكون مختلفة؛ لأن الأسماء ليست هي التي تكون متماثلة، بل الأشياء المسماة. فشيشرون مماثل لطوليوس (الرجل ذاته)، على الرغم من كون الاسم «شيشرون» مختلفًا عن الاسم «طوليوس». ولنقول شيئًا ما عن مواضيع معطاة نطبق الكلمة المناسبة على أسماء هذه المواضيع، غير أنه لا وجود لأي داعٍ إلى الادعاء أن

كل ما قيل حينها عن المواضيع سيصدُق أيضًا على الأسماء ذاتها. فعلى سبيل المثال، إن النيل أطول من توسكالوساهاتشي (Tuscaloosahatchie)، لكن الاسمين يوجدان في علاقة عكسية [لأن اسم النيل أقصر كتابة من اسم توسكالوساهاتشي].

بما أن عبارات الهُويّة المفيدة هي تلك التي تكون فيها المواضيع المسمّاة هي نفسها وتكون فيها الأسماء مختلفة، فإنما يرجع ذلك إلى خصوصية تكمُن في اللغة، مفادها أن مفهوم الهُويّة ضروري[1]. ومع ذلك لا بحث لغويًّا في الأسماء التي ترد في عبارات الهُويّة سيكون كافيًا، عادة، في تحديد إن كانت الهُويّة حقيقية أم لا. تتوقف الهويات:

ايفيريست = شومولونغوما (انظر. الفصل 41)،

نجمة المساء = نجمة الصباح،

الرئيس الخامس والعشرون للولايات المتحدة = أول رئيس للولايات المتحدة نصّب سنة 1942.

متوسط درجة الحرارة في توكستلا = 93° ف

يتوقف تعليلها كلها على بحث في مجالات خارج اللسانيات.

هناك لغز شعبي، غالبًا ما كان يقترن بالهُويّة ينبغي أن نقول هنا بصدده شيئًا ما، مفاده: كيف يُمكن لشيء يتغير جوهره أن يظلّ مماثلًا لذاته؟ كيف يُمكن، مثلًا، أن نتمكن من أن نتحدث عن جسدنا كما لو كنا نتحدث عن الجسد نفسه حتى بعد مضي سنين عديدة؟ تعود المسألة إلى هيرقليطس الذي قال:«**إنك لا تستطيع أن تستحم في النهر مرتين، لأن مياهًا جديدة تغمرك باستمرار**». الحقيقة أنه يجب البحث عن حل الصعوبة ليس في فكرة الهُويّة، بل في فكرتي الشيء والزمن. إن الشيء المادي -سواء كان نهرًا،

(1) ولهذا اعترضت هيوم (Hume) صعوبات في تناول فكرة الهُويّة على ضوء التجربة. انظر كتابه رسالة في الطبيعة الإنسانية:

Treatise of Human Nature, Bk. I, Pt IV, Sec II.

أو جسد إنسان، أو حجرًا- هو ما يشكل في لحظة ما مجموع أحوال آنية ومتزامنة للذرات، أو مكونات فيزيائية صغرى أخرى، منتشرة في المكان. والحال أنه، مثلما أن الشيء في لحظة معطاة هو مجموع هذه الأجزاء الصغرى مكانيًا، فكذلك نستطيع أن نفكر في الشيء خلال مدة معينة باعتباره مجموع الأجزاء الصغرى زمنيًا التي هي أحوالها الآنية المتوالية. وبتأليفنا لهذه التصورات، يتبدّى لنا الشيء ممتدًّا في الزمان والمكان بكيفية متشابهة: فيصبح الشيء مجموع الأحوال الآنية للجزيئات، أو باختصار، آنات-جزيئات، مقسمة في الوقت نفسه على امتداد الزمان والمكان. يسري كل هذا على النهر أو على جسد الإنسان أو على الحجر على حد سواء، فليس بين الحالتين سوى اختلاف في التفصيل: في حالة الحَجَر تكون الآنات-جزيئات مكوِّنًا قابلًا للتبدل تمامًا من زمن إلى آخر باعتبارها مراحل مؤقتة للجزيئات نفسها، أما في حالة النهر أو جسد الإنسان، فهناك عدم تجانس أكبر: فالنهر أو جسد الإنسان سيتضمنان بانتظام بعض الحالات الآنية لجزيء ما وسيستبعدان حالات آنية أخرى للجزيء نفسه. في حين أننا مع الحجر، إذا ما استثنينا تغيرات صغيرة محيطة أو هدم كلي، لا يسري عليهما الشيء نفسه. يجعلنا هذا التمييز نفكر في التمييز بين «الأعراض» و«الماهيات» في الفلسفة التقليدية. غير أن الأشياء، كيفما كان نوعها، هي هنا أشياء مادية بالمعنى الواحد نفسه: **مجاميع الآنات-الجزيئات.** وبالإضافة إلى أن كل شيء يكون مماثلًا لذاته نستطيع أن نستحم مرتين في النهر نفسه؛ وما لا نستطيع القيام به هو أن نستحم مرتين في الجزء الزمني نفسه من النهر، لأن كل جزء من أجزائه يكون أقصر زمنيًا من مدة نزولنا للاستحمام فيه، فالفروق الموجودة بين أجزاء الكل لا ينبغي أن تعمينا لا عن هُويّة الكل في ذاته، أو عن كل جزء في حدِّ ذاته.

لقد تأملنا إلى حد الآن في عبارات الهُويّة المكونة من «=» وحدود شخصية.

بيد أن «=» مفهوم نسبي عادي، ويمكن أن يُرافق إذًا حتى بالمتغيرات، مثال ذلك:

Λسـ Λعـ (سـ إله . Λ عـ إله. ←. سـ = ع)،

Vسـ [سـ إله . Λ Λعـ (عـ إله ←. سـ = عـ)]،

Vسـ Vعـ (سـ إله . Λ عـ إله . Λسـ ≠ عـ)،

Λسـ ΛعـΛهـ (سـ إله . Λ عـ إله . Λ هـ إله .←: سـ = عـ .V. سـ = هـ .V. عـ = هـ).

(إن الترميز «سـ ≠ عـ» اختزال ملائم لـ «¬(سـ = عـ)»)، كما يُمكن للقارئ أن يتحقق، بأدنى قدر من التفكير، من أن هذه العبارات الأربعة تُكافِئ على التوالي العبارات التالية:

يوجد على الأكثر إله واحد[1]

يوجد بالضبط إله واحد،

يوجد على الأقل إلهان،

يوجد إلهان على الأكثر.

تعدُّ عبارات الهُوِيّة المكوَّنة من «=» المصحوبة بحدود شخصية ضرورية، لأن حدين شخصيين يُمكن أن يُسمِّيا شيئًا واحدًا. غير أن ضرورة «=» مصحوبة بالمتغيرات تصدر عن خاصية أخرى للغة، أي استعمالها لمتغيرات الأسوار المتعددة (أو ما يماثلها من الضمائر في اللغة العادية). إننا نسمح لمتغيرين أن يعيِّنا الموضوع نفسه، كما نسمح لهما بتعيين مواضيع مختلفة؛ ومِن ثَمَّ يكون من اللازم اللجوء إلى علامة الهُوِيّة بمجرد أن تظهر، كما في الأمثلة الأربعة السالفة، مسألة تماثل أو عدم تماثل إحالة المتغيرات. فمن وجهة نظر منطقية يكون استعمال رمز الهُوِيّة بين المتغيرات، بدل من أن يكون بين الحدود الشخصية، هو الأساسي. وسنرى، حقًّا (الفصل 44)، أن

(1) يمثل هذا القول، حسب تهكم لوايتهيد، معتقد الموحِّدين (gredo of unitariens).

مقولة الحدود الشخصية برمتها نافلة من الناحية النظرية، وأنه من المفيد منطقيًّا أن نتصوّرها كما لو كانت محذوفة نظريًّا.

إن منطق الهُويّة فرع لا يقبل الاختزال إلى منطق التسوير. فترميزه يُمكن أن يُتصور باعتباره يشمل ترميز منطق التسوير زائد الرمز الوحيد المضاف «=». وبذلك تكون صور منطق الهُويّة مماثلة، إذًا، للصور التسويرية من حيث إمكان احتوائها، في الوقت نفسه مع الجمل «ب»، «جـ»، «ك(سـ)»، «ل(سـ عـ)»، إلخ، جمل إضافية لها صور الهويات التالية: «سـ = عـ»، «سـ = هـ»، إلخ. ويمكن أن نحدد الصحة بالنسبة إلى صور منطق الهُويّة تمامًا كما تمّ ذلك بالنسبة إلى الصيغ التسويرية (الفصل 27). وهكذا توجد بعض الصيغ الصّحيحة نحو:

V عـ (سـ = عـ . ∧ ك(عـ)) ← Vعـ (سـ = عـ)

التي تكون مثل الصور التسويرية الصحيحة تقريبا باستثناء كون «سـ = سـ»، «سـ = عـ» إلخ. تأخذ مكان الجمل الصورية «ل(سـ سـ)»، «ل(سـ عـ)»، إلخ. وتكون هذه الصيغ صحيحة بفضل بنيتها التسويرية وحدها، وفي استقلال عن خصوصيات الهُويّة. غير أن هناك أيضًا صورًا صحيحة تتوقف صحتها خصوصًا على دلالة الهُويّة، ومنها هذه الصورة:

(1) ك(سـ) . ∧سـ = عـ .← ك(عـ).

لذلك، هب أن لدينا اختيارًا ما لمجال القول، وداخله تأويل ما لـ «ك»، ثم إسناد مواضيع ما إلى المتغيرين المطلقين «سـ» و«عـ». فإذا كان الموضوع المسند إلى «سـ» هو نفسه الذي نسنده إلى «عـ»، وإذا كانت «ك»، فضلًا على ذلك، تصدق عليه بالتأويل، فإن (1) تصدق بصدق تاليها «ك(عـ)»، وفي أي حالة أخرى تكون (1) صادقة بسبب كذب مقدمها.

وبضم رمز الهُويّة إلى ترميزنا المنطقي نكون قادرين، لأول مرة، على كتابة عبارات صحيحة دون أن نخرج عن الترميز المنطقي في حدّ ذاته. إلى غاية

الآن، ظلت الصيغ تمثل أقصى ما يُمكن أن نحصل عليه: ينبغي أن نستمد أدوات من خارج المنطق (extralogical)، أي من اللغة العادية في كل مرة نحتاج فيها، لغايات الإيضاح، إلى عبارة صحيحة. فمع «سـ = سـ» و«Λسـ (سـ = سـ)» أصبح لدينا، منذ الآن، عبارتان: الأولى مهملة والثانية محصورة وصادقة.

إن كل الصور التي حصلنا عليها بوضع متماثلات من قبيل «سـ = سـ»، و«سـ = ع» إلخ، مكان «ل(سـ سـ)»، «ل(سـ ع)»، إلخ، في صور تسويرية صحيحة هي، كما بيناه قبل قليل، صور صحيحة لمنطق الهُوِيّة، غير أن مثل هذا التبديل لمكونات صورية بهويات يُمكن أن ينتج أيضًا، عندما يكونُ تامًا، عبارة وليس صورة، كما في المثال التالي:

سـ = سـ .← Vعـ (سـ = ع).

يمكن أن ينطبق مفهوم الصحة على عبارات من هذا القبيل مثلما ينطبق على الصور، وفق ما ورد في الفصل 28.

إن هذا المثال صحيح تسويريًا بالمعنى الوارد في ذلك الفصل. ومن بين العبارات التي تتوقف صحتها خصيصًا على دلالة الهُوِيّة، نجد، من ناحية ثانية، أن أبسطها ستكون هي:

(2) سـ = سـ

وستكون عبارة أخرى، تستلزمها العبارتان السالفتان صدقيًا، هي: «Vعـ (سـ = ع)».

ويمكن أن نجري إنابات على «ك» في (1) بالطريقة التي بيناها في الفصل 28، غير أن التعابير المستبدلة يُمكن أن تتضمن في الوقت الراهن رموز الهُوِيّة بدل أحرف الحدود. ويُظهر لنا إمعانٌ في الآلية العامة للإنابة (الفصل26) أن «ك(سـ)» و«ك(ع)»، وخصوصًا في (1)، يُمكن إنابتهما مباشرة وعلى التوالي بصور بحيث يكون الفرق الوحيد بينهما هو أن

الواحدة تتضمن «س» مطلقًا في بعض المواقع التي تتضمن فيها الأخرى «ع» مطلقًا. وبذلك ستكون صيغة الصورتين كما يلي: «...س...س...ع...» و«...س...ع...ع...». وعليه سيكون المجرد المستبدل نظريًا بـ «ك» هو: {هـ:...س...هـ...ع...}». ومِن ثَمَّ يصبح من بين نتائج الإنابة في (1) ما يلي:

ف = س . ٨ س = ع . ←. ف = ع

أي قانون تعدية الهُويّة (انظر الفصل 29).

سنصطلح على التسويرات الكلية لـ (1) و(2)، أي:

٨س٨ع (ك(س) . ٨ س = ع ← ك(ع))، ٨س (س = س)،

بمعية التسويرات الكلية لكل النتائج الناتجة عن إنابات «ك» في (1)، بـ مسلّمات الهُويّة. تنتقل تقنية البرهان في نظرية التسوير كليًا إلى منطق الهُويّة؛ وسنتعامل ببساطة مع المسلّمات باعتبارها مقدمات، وهكذا ينتج قانون تناظر الهُويّة «س = ع .←. ع=س» صدقيًا عن الحالة (1)

س = س . ٨ س = ع .←. ع = س

بمعية (2):

ومن أجل توضيح أكثر لنبين أن «٨ع (س = ع .← ك(ع))» تُكافِئ «ك(س)»، بإثبات لزوم مزدوج، إلى الأمام وإلى الخلف، على منوال الطريقة المذكورة في ختام الفصل 37.

[2 ←.] ٨ع (س = ع .← ك(ع)) ←ك(س).

[٨ع 1 ←.] ك(س) ← ٨ع (س = ع .← ك(ع)).

إن كل واحد من هذين السطرين صحيح واحديًا.

يجب أن نتذكر أن رمز الهُويّة يتصرف، في هذه الاستدلالات، كحرف حملي ساكن، كما لو كانت «س = س» و«س = ع» هي «ل(س س)» و«ل(س ع)». تحضر الخصائص المميزة للهُويّة بشكل صريح، عندما نرغب في ذلك، من خلال ذكر مُسلّمة ما للهُويّة. ومن المناسب أحيانًا أن نذكر المُسلّمة

وسورها أو أسوارها وأحيانًا من دونها، كما توضح ذلك الأمثلة أعلاه.

لمحة تاريخية: بيّن غودل سنة 1930 (المبرهنة السابعة) أن مسلّمات الهُوِيّة تامة. بعبارة أخرى، يُمكن أن نبرهن انطلاقًا منها على كل صورة أو عبارة صحيحة لمنطق الهُوِيّة بواسطة منطق التسوير.

تمارين

1. بكتابتك «ع» بَدَل «بار»، و«هـ» بدَل «المصرفي»، و«ك» بدَل «كان لديه المفتاح»، ترجم العبارة التالية:

لا أحد كان لديه المفتاح سوى باروالمصرفي

إلى الترميز المنطقي مستعينًا بالهُوِيّة. بيّن أن هذه العبارة والعبارة:

شخص ما كان لديه المفتاح أخذ الخزينة.

يستلزمان النتيجة التالية:

إما بارأو المصرفي أخذ الخزينة.

مستعينا بإحدى مسلّمات الهُوِيّة.

2. برهن على تكافؤ:

V سـ (ك(س) . ∧ سـ = ع)، ك(ع)

من خلال البرهنة على اللزومين مستعينًا بمسلّمات الهُوِيّة.

43 الأوصاف

من الشائع في المنطق أن نكتب «(اسـ)»، حرف يوطا مقلوب، للدلالة على «الموضوع سـ بحيث إن». وبذلك يغدو الحدّان الشخصيّان المركبان «مؤلف ويفيرلي» و«العدد الأولي ما بين 5 و11» بهذا الشكل:

(اسـ)(سـ كتب ويفيرلي)، (اسـ)(سـ عدد أولي . ٨ 5 < سـ < 11).

تسمّى الحدود الشخصية المكتوبة بهذا الشكل الأوصاف. تبتدئ الحدود الشخصية في اللغة العادية، التي يُمكن تمثيلها بهذه الطريقة كأوصاف، بطريقة نمطية بأداة «الـ»، كما أنه لا وجود هنا لأية ضرورة بتاتًا كما تبين الأمثلة الآتية:

ما سعى إليه،	(اسـ) (سعى إلى سـ)؛
حيث ولد،	(اسـ) (حيث ولد سـ)؛
أم جون،	(اسـ) (سـ أنجَبَت جون)؛
منزل سميث،	(اسـ) (سـ منزل . ٨سـ منزل سميث)؛

وعلى العموم يفترض أن يسمّي الحدّ الشخصي موضوعًا واحدًا ووحيدًا. والحدّ الشخصي ذو الصيغة «(اسـ) ك(سـ)» مخصوص بكونه يفترض أن يسمّي موضوعًا واحدًا ووحيدًا يصدق عليه الحد الكلي الذي تمثله «ك». مثلًا، إذا كانت عـ هي الموضوع (اسـ) ك(سـ)، فإن عـ يجب أن تكون بحيث:

ك(عـ) . ٨ ك لاشيء سوى عـ

ويعني هذا الوصل القول إنه بالنسبة إلى كل شيء سـ، تصدق «ك» على سـ إذا كان سـ = عـ، وتكذب على سـ في الحالات الأخرى. باختصار:

(1) ∧سـ (ك(سـ) ↔. سـ = ع).

فأن نقول، على سبيل المثال، إن سكوت (Scott) هو (اسـ) (سـ كتب ويفيرلي) معناه القول:

∧سـ (سـ كتب ويفيرلي ↔. سـ = سكوت).

إذا كانت سـ لا تصدق على أي شيء، أو كانت تصدق على أشياء كثيرة، فإنه لا وجود لأي شيء من قبيل (اسـ) ك(سـ). وعليه، غالبًا ما يتطلب الحد الذي يلعب دور «ك» من «(اسـ) ك(سـ)» في الأمثلة الفعلية المستقاة من الخطاب اليومي جملًا تكميلية تجعله، عندما نقلّص مداه، يصدق على موضوع واحد؛ غير أنه يُمكن أن ينظر إلى هذه الوضعية في الغالب كحالة بسيطة للممارسة المألوفة التي تقتضي الرجوع إلى السياق أو إلى الظروف من أجل حلِّ التباسات اللغة الطبيعية. علاوة على ذلك، سيكون من غير الطبيعي تفسير كل استعمال للمفردة «ال» بهذه الطريقة؛ غالبًا ما يكون أفضل اعتبار لها ذو علاقة بالضمير. الشائع أن «الصبي»، «السيارة» تستعملان فقط كضميرين تكون سابقاتهما نحويا اسم أو وصف أو ربما حد كلي وسور. أما في الترميز المنطقي فإن هذا الضمير يظهر ببساطة كمتغير مقيّد.

لقد رأينا في الفصل 41 أن الأدلة التي تتضمن حدًّا شخصيا يُمكن أن تعالج كليًّا بواسطة النظرية العادية للتسوير بعد استبدال متغير مطلق بحد شخصي، وليكن «ع»، لكن شريطة أن يتوقف تطبيق النتائج، المقترنة بتأويل ع باعتباره الموضوع الذي يسمّيه الحدّ الشخصي، على وجود موضوع من هذا القبيل. لا يظهر هذا التأويل لـ ع، وافتراض الوجود الذي يقوم عليه في أي مكان من تصوير الاستدلال، بل يظهران فقط في غضون المرحلة غير الصورية للتطبيق. وتكمن جمالية الأوصاف في كون التأويل الذي يجعل من ع الموضوع المسمّى يُمكن له، هو نفسه، أن يُصوَّر بشكل صريح كمقدمة مُضافة، ذات الصورة (1) أعلاه. ستتبدى تقنيتنا بالنسبة إلى الاستدلالات

المتضمِّنة للأوصاف على النحو التالي: أن نستعمل بالنسبة إلى الأوصاف، كما هو الحال بالنسبة إلى ما نفعله مع أي حد شخصي، متغيرات مطلقة، ولكن مع الإلحاق بكل وصف مقدمة وصفية ذات الصورة (1). كما نستدعي عادة مُسلَّمة الهُويّة، بسبب «=» المتضمنة في المقدمة الوصفية. وعليه، دعونا نجرب هذا المثال:

مقدمة: المدير الذي وظّف جون وظّف حَمَلة الشهادات فقط،

نتيجة: كان لجون شهادة.

لدينا هنا حدّان شخصيان- الحدّ الشخصي «جون» والحد المركب «المدير الذي وظّف جون». فلنمثلهما على التوالي بالمتغيرين المطلقين «ف» و«ع». ونستطيع بكتابة «ك» بالنسبة إلى «مدير» و«ل» بالنسبة إلى «وظّف» أن نعبر كذلك عن الحدّ الشخصيّ المركب بواسطة الوصف «(اسـ)(ك(سـ) . ∧ل(سـ، ف))»: وعليه، نحصل على المقدمة الوصفية المقابلة:

∧مـ (ك(مـ) .∧ ل(سـ ف) .↔. مـ = ع).

ونريد أن نبين، إذًا، أنه انطلاقًا من هذه المقدمة ومن المقدمة الأصلية، أي «∧سـ (ل(ع، سـ) ← م(سـ))» حيث«م» تمثل «حاصل على شهادة»، وربما نستطيع أن نحصل من مُسلَّمة للهُويّة أخرى على «م(سـ)». إننا نفعل ذلك عندما نحوِّل الشرط:

∧مـ (ك(سـ) .∧ ل(سـ، ف) .↔. مـ =ع) .∧ ∧سـ (ل(ع، سـ) ← م(سـ)) .∧

∧مـ (مـ = سـ) .← م(ف)

إلى صورة وجودية خالصة نكتشف بسرعة صحته.

تتوفق إمكانية جعل الاستنباط يستفيد من امتيازات مقدمة وصفية ، بالتأكيد، على إمكانية ترجمة أمينة لحد شخصي معطى إلى صورة وصف. والحال أن الأمانة في الترجمة مسألة يُساء تحديدها، إنها متوقِّفة على مفهوم الترادف الذي فحصناه بطريقة غير مدققة في الفصل 41. يبدو أننا

يُمكن أن نترجم «مؤلّف ويفيرلي» بأمانة إلى «(اسـ)(سـ ألّف ويفيرلي)»، ولكن لا «سكوت» ولا «مؤلّف إيفانويه (Ivanhoé)» فعَلا ذلك، وذلك على الرغم من كون كل هذه العبارات تسمّي الموضوع نفسه؛ وذلك لأننا نشعر جيدًا أن «مؤلّف ويفيرلي» ترتبط بـ «(اسـ)(سـ ألّف ويفيرلي)» بمعنى واحد، في حين أن «سكوت» و«مؤلّف إيفانويه» يرتبطان فقط بواسطة ظروف عرضية.

ويظهر في الوقت نفسه أن الحدود الشخصية يُمكن أن تختلف بشكل كبير من حيث الشكل عن المفردة «ال»، فتعتبر، مع ذلك، قابلة لأن تترجم بأمانة إلى أوصاف: والشاهد على ذلك «أم جون». والحق أنه حتى الحد البسيط مثل «سقراط»، يكون، كما دافع عن ذلك راسل[1]، بالنسبة إلى كل واحد مرادفًا لوصف ما قد يكون «(اسـ)(سـ كان فيلسوفًا .٨ سـ شرب السم)»، أو قد يكون وصفًا آخر بحسب ما تعلّمه كل واحد منًا عن سقراط. فهل ينبغي أن نأمل، إذًا، في أن تكون كل الحدود الشخصية قابلة لترجمة أمينة إلى صورة أوصاف باستثناء تلك الأسماء النادرة التي يُمكن اعتبار أننا تعلّمناها من خلال الاتصال المباشر بين الاسم والموضوع؟ هل يجب أن نترك فئة مفتوحة ومعزولة تخصّ هذه الاستثناءات الافتراضية القليلة؟

لحسن الحظ أننا نستطيع تجنُّب هذا النوع من الاعتبارات الإبستيمولوجية لمنطق الحدود الشخصية بواسطة حيلة بسيطة: بالتوكيد على أولوية الحدود الكلية. إذ نستطيع أن نؤكد أن ما نتعلّمه بشكل عيني، أو بالاتصال المباشر، لا يكون على الإطلاق أسماء، بل حدودٌ كلية فقط. وهذا ما نستطيع التأكيد عليه تحديدًا على مستوى النحو المنطقي دون إجحاف في حقّ الإبستمولوجيا أو الأنطولوجيا. دون الإجحاف في حق الإبستيمولوجيا لأننا قد نمنح الإبستيمولوجيا أيًا من الكلمات التي تتعقب الإشارة؛ إننا نحلِّلها فقط بشكل مختلف. فبدلًا من التعامل مع الكلمة

(1) مثلًا، في «المعرفة المباشرة» (Knowledge by acquintance).

المكتسبة بشكل إشاري كاسم للكائن المعروض للبداية به. نتعامل معه بداية كحد كلي يصدق بشكل حصري على الكائن المعروض؛ ثم نفسر الاسم، على هذا النحو، باعتباره يساوي «(ا سـ) ك(سـ)» حيث «ك» تمثل الحد الكلي الأولي. لا يمس الإبستيمولوجيا، لكنه يكسب النظرية المنطقية الكثير من السلاسة.

هكذا لم يعد هناك عائق أمام اعتبارنا كل الحدود الشخصية أوصافًا، ثم نضيف إلى ذلك أنه عندما يكون لدينا حد شخصي من اللغة العادية، وليكن «سقراط»، أو «عنقاء»، أو «مؤلِّف ويفيرلي»، لا يجب للاختيار المناسب لـ «ك» كترجمة للحد في صورة «(ا سـ) ك(سـ)» أن يعطِّلنا على الإطلاق خلال الممارسة. إذا كانت ترجمة جاهزة من قبيل «(ا سـ) (سـ ألّف ويفيرلي)» متاحة لنا فذاك، وإن لم توجد يجب ألا نتردد في قبول صيغة من النوع: «(ا سـ)(سـ هو سقراط)»، أو «(ا سـ)(سـ هو العنقاء)»، لأنه مهما كانت كل صيغة أقل ركاكة تظل مع ذلك، وإن كانت ترجمة مقبولة، مختلفة على الأكثر من حيث قيمة التمثيل وليس من حيث الدلالة.

لا تسهّل أدلة الأمثلة المشابهة لمثال المدير، التي عرضنا أعلاه، التحويل المبتذل للحدود الشخصية البسيطة إلى أوصاف. فتأويل «جون» في مثال المدير باعتباره وصفًا «(ا سـ)(سـ هو جون)»، أو «(ا سـ)(ن(سـ))» سيعطينا الحق في مقدمة وصفية تكميلية «∧سـ (ن(سـ) ↔. سـ = ف)»، غير أن هذا ليس ضروريًّا أو مفيدًا بالنسبة إلى الإنجاز السليم للاستنباط. إن الامتياز الذي قد نحصل عليه في معالجة كل الحدود الشخصية باعتبارها أوصافًا ذو طبيعة أكثر نظرية: يوفر علينا وجوب أن نقبل في إطار نظريتنا التقنية تمييزًا بين فئة مكوَّنة من الأوصاف وفئة مكونة من حدود شخصية غير وصفية. ومن المهم نظريًّا ألّا يكون علينا أن نأخذ بهذا التمييز لأنّ مسألة معرفة ما إذا كانت هناك حدود شخصية غير وصفية على الإطلاق، وإن

وجدت فتكتنفها، كما رأينا سالفًا، نظرية المعرفة والدلالة. لقد استبعدنا من جهتنا هذه المشكلة عن دائرة اهتماماتنا، عبر نقلها من مجال الحدود الشخصية إلى مجال الحدود الكلية. إذ يُمكن لكل حدٍّ شخصيٍّ في الوقت الراهن، وبطريقة على الأقل مبتذلة أن يُتناول باعتباره وصفًا؛ فمن مشكلة تتعلق بالأسماء المحصلة مباشرة في مقابل الأسماء المكتسبة بالخطاب، خلقنا مشكلة تتعلق بالحدود الكلية المُحصَّلة بالإشارة في مقابل الحدود الكلية المحصلة بالخطاب. وبهذه الصيغة، تكفُّ المشكلة عن إعاقة مختلف تصوراتنا للصور المنطقية والمقولات، ويمكن أن تترك لعقول أخرى.

وهناك امتياز آخر، أكثر إثارة، يُمكن تحصيله عندما نعالج بهذه الكيفية كل الحدود الشخصية باعتبارها أوصافا، غير أن تناوله يجب أن يتم في الفصل اللاحق.

تمارين

1. عبّر عن «الرجل الأطول في المدينة» بالصيغة «(اس)(...سـ...)»، مستعملًا «أطول من» وليس «الأطول».
2. بيّن أن المقدمة الوصفية، ومُسلَّمة الهُويّة، ثم المقدمة:

   مؤلف ويفيرلي كتب إيفانويه.

تستلزم كلها:

   شخص ما كتب كلًّا من ويفيرلي وإيفانويه.

44 حذف الحدود الشخصية

دعونا نواصل تناول مسألة، لوحت منذ مدة، تتعلق بالقيمة الصدقية لعبارات من قبيل «العنقاء تنبح». إن تعدية الكذب، بصفة قطعية، إلى كل العبارات التي تتضمن «العنقاء» سيكون أمرًا متسرعًا تمامًا: أولًا، لأن القول: «لا وجود لشيء من قبيل العنقاء» صادق على الأقل؛ ثم، لأن كل العبارات، كيفما كانت، التي نقرّبكذبها تقبل بالضرورة مكوِّنات، مثلًا تكون نوافيها صادقة؛ وأما تعدية الصدق، بصفة قطعية أيضًا فسيصادف الصعوبات نفسها.

لا تسلط طرائقنا الاستنباطية للحدود الشخصية أيَّ ضوء على المسألة؛ لأننا سلمنا من قبل، بالفعل، أن الحدَّ الشخصي عندما نمثله بمتغير مطلق يُسمِّي موضوعًا، ونقوم من جديد بالافتراض نفسه عندما نتبنى مقدمة وصفية بالنسبة إلى وصف ما. ونظرًا لانعدام وجود موضوع مسمّى، لا تبين طرائقنا أي شيء، لأن ما يفترض أن تبيِّنه يستند حينئذ إلى افتراض لاواقعي. علاوة على ذلك، يتركنا الاستعمال المشترك هو الآخر في العتمة، لأنه باستثناء السياقات من نوع «لا وجود لأي شيء من قبيل العنقاء» لا يستعمل الحد الشخصي عادة إلا عندما يعتقد المتكلم، أو يتظاهربالاعتقاد، في أن الموضوع موجود.

لقد رأينا (الفصل الثالث) أن القيم الصدقية، في الاستعمال العادي، لا ترتبط بالشرطيات الخبرية في كليتها، بل بتواليها فقط، بكيفية شرطية، تبعًا لصدق مقدّمها. وعلى المنوال نفسه، ودائمًا في الاستعمال العادي، لا

ترتبط القيم الصدقية بالسياقات المتضمِّنة للحدود الشخصية في الغالب إلا بطريقة مشروطة تبعًا لوجود المواضيع. بيد أنه، إذا كنَّا نرغب في التوفر على نظرية منطقية متجانسة، فسيكون علينا أن نملأ -وإنْ اعتباطيًّا- ثغراتٍ من هذا القبيل، بحيث تتمكن كل عبارة من الحصول على قيمة صدقية. وعلى هذا النحو قمنا في الفصل الثالث بتوسيع مفهوم الشرط، بالاتفاق، بحيث نمنح كل الشرطيات، على العموم، قيم الصدق. نحتاج الآن إلى توسيع، له الطابع نفسه، يخص الحدود الشخصية التي لا تُسمِّي.

من المستحيل أن يتم هذا التوسيع، كما رأينا، بواسطة بتّ عام يفترض أن كل السياقات التي تضم حدًّا من قبيل «العنقاء» تكون كلها كاذبة، أو كلها صادقة. ومع ذلك، من الممكن أن نبتّ في السياقات البسيطة ثم نقوم باشتقاق القيم الصدقية للمركبات من هذه العمليات للبتّ. ولهذه الغاية، نقول عن حد كلي إنه بسيط عندما لا تكون له، بكيفية صريحة، صورة مجرد، أو نفي، أو وصل أو فصل، أو شرط، أو تشارط مركب من مكونات أكثر قصرًا. عندما يطبق حد كلي بسيط من هذا النوع على حد شخصي لا يسمّي، سنصنف العبارة الناتجة ضمن العبارات الكاذبة (بالنسبة إلى كل قيم كل المتغيرات المطلقة التي يُمكن أن تتضمنها). وهكذا تقوَّم «العنقاء تنبح»، المكوَّنة كما هي بإسناد الحد البسيط «تنبح» إلى «العنقاء»، بالكذب.

يستدعي استعمال ملائم لهذه القاعدة عبارات تعتبر قد خضعت لتحليلات تامة من ناحية بنيتها المنطقية. فإذا ما استمرت هذه العبارات في حاجة إلى ترجمة الكلمات إلى رموز، علينا أن نحتاط عند معالجة محمول باعتباره «بسيطًا» بالمعنى أعلاه ثم نترجمه إلى محمول مركّب.

وعلى سبيل الإيضاح دعونا نفحص مجددًا الملفوظ:

(1) المدير الذي وظّف جون لم يوظِّف سوى حملة الشهادات فقط.

فلو أخذنا «ك» دالة على «المدير»، و«ل» على «موظف» يُمكن التعبير عن

الجملة: «المدير الذي وظّف جون» بـ «(اسـ)(ك(سـ) .∧ ل(سـ) جون)».

وأنّ القول بأن هذا الشخص المعني قد وظّف ظ، يعني القول:

(2) ل(اسـ)(ك(سـ) .∧ ل(سـ) جون) ظ.

وهكذا تصير (1):

(3) ∧ظ [ل (اسـ) (ك(سـ) .∧ ل(سـ) جون) ظ ← م(ظ)]

حيث «م» تعني «حامل شهادة». ولنفرض الآن أنه لا مدير وظّف جون، أو أن كثيرين قد فعلوا ذلك، بحيث لا وجود لأيّ شيء من قبيل المدير الذي وظّف جون. وطبقًا للقرار الذي تبنّيناه قبل قليل بالنسبة إلى الحالات من هذا النوع، يجب أن يصنف السياق البسيط (2) لـ «(اسـ)(ك(سـ) .∧ ل(سـ) جون)» باعتباره كاذبًا بالنسبة إلى كل اختيارات ظ. غير أنه يتبين، في الوقت نفسه، أن الشّرط الوارد في (3) صادق بالنسبة إلى كل اختيارات ظ نتيجة كذب المقدم، فتصبح (3) صادقة. وعندئذ تكون النتيجة هي كون (1) صادقة، باستقلال عن كل اعتبار يخص حملة الشهادات، في حالة ما إذا لم يتم توظيف جون من قبل أيّ مدير، أو وظّفه مديرون كثيرون. وهذه النتيجة الخاصة غريبة تمامًا، لا جيدة ولا سيئة، لأن الاستعمال العادي يترك الحالات من هذا القبيل معلّقة.

ومع ذلك، حتى عندما لا يسمِّي الحدّ الشخصي نعلم جيّدًا ما يجب أن تكون عليه القيمة الصدقية للسياق الخاص «يوجد [أو: لا يوجد] شيء ما بحيث...» بيد أن العبارات التي لها هذه الصيغة تتطلب تحليلًا مفصولًا، وفق أسطر تجعلها الملاحظات السالفة بدهية تقريبًا، وهي كالتالي:

(أ) يُمكن أن نعتبر «(اسـ) ك(سـ)» صورة عامة للحدود الشخصية.

(ب) يفترض أن تسمي «(اسـ) ك(سـ)» موضوعًا واحدًا وواحدًا فقط تصدق عليه «ك» (مع افتراض أي حد كلي هنا مكان «ك»).

(ج) تعني ∧سـ (ك(سـ) .↔ سـ = ع) القول نفسه إن ع هو الموضوع الواحد

والواحد فقط الذي تصدق عليه «ك».

عندما نقول بوجود شيء ما بحيث «(اسـ) ك(سـ)» يعني القول، وَفقًا لـ (ب)، بوجود موضوع فريد تصدق عليه «ك»، وهذا ما يُمكن أن نعبر عنه وَفقًا لـ (ج)، على النحو التالي:

(4) Vعـ Λسـ (ك(سـ) .↔ سـ = عـ).

إننا نحصل حينها على صياغة ملائمة لـ «يوجد شيء بحيث (اسـ) ك(سـ)». ولن نرغب في شيء أكثر، تبعًا لـ (أ)، في صياغة العبارة العامة «يوجد شيء ما بحيث...».

ومن الغريب إلى حد ما أن ترجمة (4) لـ «يوجد شيء ما بحيث (اسـ) ك(سـ)» لا تتضمن الحدّ الشخصي «(اسـ) ك(سـ)». والحال أن حذف «(ا سـ) ك(سـ)» يُمكن أن يتم أيضًا في سياقات أخرى. ذلك لأننا نعتبر «ل» تمثّل حدًّا كليًّا «بسيطًا» بالمعنى الذي أتينا على تحديده قبل قليل. في ظل هذه الشروط يُمكن أن نتشارح «ل(اسـ) ك(سـ)»، التي تُسند «ل» إلى (اسـ) ك(سـ)، بالصيغة التالية:

(5) Vعـ [ل(عـ) .Λ Λسـ (ك(سـ) ↔. سـ = عـ)].

وهو ما يظهر بالطريقة الموالية. هب في البداية (الحالة 1) أنه، يوجد شيء بحيث ل(اسـ) ك(سـ). فالجملة «Λسـ(ك(سـ) ↔. سـ= عـ)» تماثل إذًا عـ بـ «(ا سـ) ك(سـ)»، وبالتالي تصبح (5) بِرُمّتها صادقة أو كاذبة بحسب ما إذا كانت «ل» تصدق أو تكذب على «(اسـ) ك(سـ)». ثم هب، في (الحالة 2) أنه لا يوجد أي شيء بحيث «(اسـ) ك(سـ)». في هذه الحالة تصبح «Λسـ(ك(سـ) ↔. سـ = عـ)» كاذبة بالنسبة إلى كل اختيارات عـ، وبالتالي تصير (5) كاذبة. غير أن «ل(ا سـ) ك(سـ)» يجب أن تكذب بالمنوال نفسه في هذه الحالة، طبقا لاتفاقنا الأخير حول الحدود الكلية البسيطة التي نسندها إلى الحدود الشخصية التي لا تسمّي.

لقد أصبح بمقدورنا، من الآن فصاعدًا، حذف الحدود الشخصية حيثما نجدها. ومتى كانت لدينا عبارة تشمل حدودًا شخصية، نقوم بترجمتها إلى الرموز الصريحة للتسوير وللدوال الصدقية بشكل كامل قدر الإمكان، دون أن نمسّ بالحدود الشخصية باعتبارها مكوِّنات لكن مع وضع كل واحد منها في صورة وصف. وبعد ذلك نعوض كل سياق بسيط لكل وصف بما يكافئه من الصيغة (5)، أو بـ (4) إذا ظهر أنه يتوفر على الصيغة «يوجد شيء ما بحيث (اس) ك(س)».

وسعيًا وراء البساطة، لم نتصور، إلى حدِّ الآن، سوى الحدود الشخصية المحصورة، في مقابل حدود مهملة من قبيل «س + 5»، أو «الابن الأكبر لـ(س)» أو «(اس) (س كتب هـ)». ومن الواضح، مع ذلك، أن الحدود المهملة يُمكن أن تحذف بالطريقة نفسها؛ ولا يغير بقاء المتغير المطلق شيئًا جوهريًّا في البرهنة.

وحتى نرى كيف تتمُّ عملية حذف الحدود الشخصية عمليًّا، لنعد إلى (1) ولنحذف الحدّين الشخصين «جون» و«المدير الذي وظّف جون». كخطوة أولى، نستطيع أن نحذف الوصف من السياق البسيط (2). وقد رأينا أن الطريقة العامة لهذه العملية هي ترجمة «ل(اس) ك(س)» إلى (5)، غير أن ما يجب أن نتعامل معه بدل «ل(اس) ك(س)» في الوقت الراهن هو (2)، وهذه الأخيرة لها الصيغة «ل(اس) ك(س)» تمثل «{هـ: ك(هـ) .٨ ل(هـ) جون}» «ك» وتمثل «{هـ: ل(هـ، ظ) }» «ل». تنتج هذه الإنابات، متى طُبِّقت على (5)، ما يلي:

(6) Vع [ل(ع، ظ) . ٨ ٨س (ك(س) .٨ ل(س) جون .↔. س = ع)]،

كترجمة لـ(2). ويبقى، مع ذلك، أن نُعنى بـ «جون». وبكتابتنا خ بالنسبة إلى «هو-جون» نجعل «جون» وصفًا «(اهـ) خ(هـ)»، بحيث تصبح «ل(س) جون» في (6) هي «ل(س) (اهـ) خ(هـ)». ويكون لهذه الجملة الأخيرة الصيغة «ل(اس)

ك(سـ)» مع «هـ» بدل «سـ»، و«خ» بدل «ك»، و«{هـ: ل(مـ هـ)}» بدل «ل». وهكذا سنحصل، بعد إجراء التغيرات المطابقة لتلك المطبَّقة على (5)، على ما يلي:

(7) Vفـ [ل(مـ فـ) .٨ Λهـ (خ(هـ) ↔. هـ = فـ)]،

كترجمة ل «ل(سـ) (اسـ)خ(هـ)». وبهذا نكون قد حذفنا الحدين الشخصيين. ويبقى علينا أن نجمع فقط الأجزاء، بوضع (7) مكان «ل(سـ) جون» في (6)، ثم النتيجة مكان (2) في (3). فنحصل حينها على:

Λظ[Vعـ (ل(عـ ظ) .٨ Λسـ(ك(سـ) .٨ Vفـ [ل(مـ فـ) .٨ Λهـ (خ(هـ)
↔. هـ = فـ)] .↔. سـ = عـ)] ← م(ظ))

كتشارح نهائي لـ (1). ومن الآن بدأ يتضح أن لحذف الأوصاف فائدة نظرية على الخصوص، وأنه في مجال التطبيق، تفرض الطريقة البديلة نفسها بقوة لمعالجة مشكلة المدير التي فحصنا في الفصل السابق.

ومع ذلك، إن الإمكانية النظرية لحذف الحدود الشخصية -أي إمكانية التخلي عن كل الأسماء- مغرية إلى درجة أن أهميتها لا تحتاج إلى التأكيد عليها بتاتًا، وإن لم يكن بطريقة سلبية لتبيان ما لا تدلّ عليه. إنها لا تعني أن لغتنا تفقد كل وسيلة للحديث عن الموضوعات؛ بل بالعكس، تبيّن الاعتبارات السابقة أن حذف الحدود الشخصية لا يصاحبه أي إضعاف لقوة اللغة. إن ما يعنيه اختفاء الحدود الشخصية هو أن الإحالة على المواضيع من كل نوع، ملموسة أو مجردة، قد أصبح منذ الآن يمر عبر قناة الحدود الكلية والمتغيرات المقيدة. ونستطيع أن نواصل قول ما نريد بخصوص أي موضوع واحد أو كل المواضيع، لكننا سنقول ذلك بواسطة تعبيري التسوير: «يوجد موضوع ما سـ بحيث...» و«كل موضوع سـ بحيث...». إن المواضيع التي يستلزم خطابنا وجودها هي في نهاية الأمر فقط تلك المواضيع التي يجب أن نعترف، من أجل صدق أقوالنا الجازمة، بكونها «قيم المتغيرات»، أي يجب

أن تعتبر من بين مجموع المواضيع التي تدخل تحت مدى متغيراتنا المسوّرة. **أن توجد هو أن تكون قيمة متغير.** لا توجد مشكلات فلسفية مطلقة تتعلق بالحدود الشخصية وبإحالاتها، بل هناك فقط مشكلات تتعلق بالمتغيرات وبقيمها؛ ولا توجد مشكلات فلسفية مطلقة تتعلق بالوجود، إن لم يكن الوجود الذي يُعبَّر عنه بالسور «V س». في المقابل ليس هناك من داعٍ، ما عدا عندما نهتم بالمناقشات الفلسفية التي تخص الإحالة والوجود اللغويين، يحرمنا من ملائمة الحدود الشخصية. ومن هنا فإن تقنيات الاستدلال التي طورناها إلى حد الآن الخاصة بالحدود الشخصية لا ينبغي أن نعتبرها متروكة.

لمحة تاريخية: وضع فريغه ترميزا للاصقة الوصف سنة 1893. أما الترميز الحالي فقد اعتمده راسل في ما بعد متابعا بيانو. تعتبر الفكرة الهامة التي تكمُن في حذف الأوصاف عبر إجراء تشارح للسياق، بالنسبة إلى ما هو أساسي كما رأيناه، مساهمة أصيلة من راسل سنة 1905، وإليه يرجع مثال مؤلف ويفيرلي، الذي أحلنا عليه، والذي يرد بكثرة في الكتابات اللاحقة حول الموضوع. لم يتخطَّ راسل المرحلة التالية التي تقضي بأن نعالج كل الأسماء كأوصاف ومن ثم نحذفها بدورها. فقد كان قد فضّل الحفاظ على التمييز الإبستيمولوجي بين الأسماء التي كانت أوصافًا مختصرة وتلك التي تشكل، بطريقة لا تقبل الاختزال، أسماء العلم، والتي نتعلمها بالمعرفة المباشرة.

تمارين

1. عبّر رمزيًا عن العبارة الآتية:

المرأة التي تسكن فوقنا ألمانية وتحب الورود

باستعمال «ك(سـ)» بدل «سـ امرأة»، و«ل(سـ)» بدل «سـ تسكن فوقنا»، «م(سـ)» بدل «سـ ألمانية» و«خ(سـ)» بدل «سـ تحب الورود». ثم حوِّل في ما بعد العبارة برمّتها بحيث تحذف كل وصف.

45 حذف المتغيرات

اكتسبنا في الفصلين 18 و19 منطقًا بوليًا فعّالًا خاصًا بالحدود الواحدية. تَمّ تركيب الحدود لتشكل المزيد من الحدود دون مساعدة التجريد أو المتغيرات المقيدة أو الأسوار. تم تشكيل الحدود من الحدود بواسطة النفي والوصل، ومن العوامل الإضافية الدّالية التي يُمكن الاستغناء عنها: «V» و«→» و«↔». وشُكلت العبارات من الحدود بواسطة عامل الوجود «V». والعوامل الإضافية التي يُمكن الاستغناء عنها: «Λ» و«⊇» و«⊃» و«≡».

تمت إضافة المجردات والمتغيرات المقيدة بعد ذلك استعدادًا للتسوير، والذي كان مطلوبًا فقط في التحضير لمنطق الحدود المتعددة. سيتبين الآن أنه من خلال تعميم النفي والوصل وعامل الوجود لتطبق على جميع الحدود المتعددة، ثم إضافة العوامل الأربعة الأخرى، يُمكننا توفير منطق للحدود المتعددة يكون بقوة منطق المجردات أو التسوير نفسها مع الاحتفاظ بروح منطقنا البولي الصغير للحدود الواحدية. أعني بذلك أنه ليس له متغيرات مقيدة ولا مجردات ولا أسوار. سيتم شرح الخطاطة من خلال شرح كيفية ترجمتها من وإلى منطق المتغيرات والمجردات أو، في نهاية المطاف، من وإلى التسوير. تعمل هذه الترجمات بشكل صريح على وصف وتحليل العمل التركيبي الذي تؤديه المتغيرات المقيدة. إن هذا الفهم المعمّق للمتغير نفسه، أكثر من أي مزايا عملية لمنطق بلا متغيرات، هو ما يجعل الرحلة الحالية تستحق أن نوليها بعض الوقت.

يمكن أن تكون الحدود واحدية أو متعددة. سنقول عن الحد النوني من

الدرجة ن. في نظرية التسوير، حيث تظهر الأحرف الحدية الصورية «ك» و«ل» وغيرها مع المتغيرات المرفوقة فقط، نستطيع معرفة درجة حرف الحد عن طريق حساب المتغيرات. ومع ذلك، هنا حيث تختفي المتغيرات في النهاية، سنظل بحاجة إلى معرفة درجات أحرف الحدود؛ لذلك دعونا نعتمد أنماطًا مميزة لأحرف الحدود بدرجات مختلفة. سأستعمل «ك^{1}» و«ل^{1}» إلخ.،كأحرف واحدية «ك^{2}» و«ل^{2}» إلخ.،كأحرف اثنانية، وهكذا دواليك. ومن أجل التوحيد سأستخدم «ك^{0}» و«ل^{0}» وما إلى ذلك بدلًا من «ب» و«ج» وما إلى ذلك كأحرف عبارية؛ أي للعبارات التي تتلاءم بسلاسة مع الصور كحدود من الدرجة 0.

لا يجب النظر إلى هذا الترميز على أنه يجعل المنطق يعتمد حديثًا على العدد. يجب أن يُنظر إلى الأس الثابت على أنه مجرد جزء من الحروف المزيّنة. إن المعلومات العددية التي ينقلونها ليست أكثر من تلك التي كانت متوفرة بالفعل في نظرية التسوير عن طريق حساب المتغيرات المرتبطة بحرف الحد.

والآن يجب تعميم النفي والوصل، المألوفين حتى الآن عند تطبيقهما على الحدود الواحدية وعلى العبارات (ومن ثم حدود من الدرجة 0)، بطريقة واضحة على الحدود من جميع الدرجات. وبهدف إحياء الحد المتعدد (الفصل 28) لأغراض تفسيرية، قد نضع الحالة العامة على النحو التالي:

(1) كَ^{ن} ≡ {سـ$_{1}$ سـ$_{2}$...سـ$_{ن}$: ¬ك^{ن} (سـ$_{1}$ سـ$_{2}$...سـ$_{ن}$)}،

(2) ك^{ن}ل^{ن} ≡ {(سـ$_{1}$ سـ$_{2}$...سـ$_{ن}$): ك^{ن} (سـ$_{1}$ سـ$_{2}$...سـ$_{ن}$) .∧ ل^{ن} (سـ$_{1}$ سـ$_{2}$...سـ$_{ن}$)}.

ويُعمَّم عامل تساوي الماصدق «≡» نفسه في هذه المرحلة، لا يصل الحدود الواحدية فقط، بل الحدود النونية أيضًا. مثل المتغيرات المقيدة «سـ$_{1}$» و«سـ$_{2}$» وغيرها، ومجردات الحدود، مع ذلك، يدخل «≡» هنا فقط كأداة شرح وليس، مثل النفي والوصل، كجزء من الترميز النهائي.

يبدو أن المتغير العددي «ن» في (1) و(2) قد استدعى أفكارًا عددية بشكل لا لبس فيه. وكذلك فعل، لكن، مرة أخرى، على مستوى العرض وليس ضمن الترميز الذي أشرح. تعتبر (1) و(2) تفسيرين عامين لـ «كَ^{0}» و«ك^{0} ل^{0}»، «ك^{1}»، «ك^{1} ل^{1}» وهلم جرًا. إن هذه التعبيرات هي في الواقع تصويرية بدورها؛ إن الأمثلة الفعلية لـ «كَ^{0}» و«ك^{1} ل^{1}» و«كَ^{2}» ستكون: «ـ(إنها تمطر)»، «كلب أسود»، «ليس عما له». بحيث لا تكون الأرقام غير متضمنة.

يتم تعميم النفي والوصل، المعمولان سابقًا في الحدود من الدرجة 0 (العبارات) و1، في (1) و(2) ليُطبَّقا على الحدود من أي درجة ن. والآن نحتاج أيضًا إلى تعميم «V». لقد طبقناه بثبات، باستثناء رحلة مؤقتة في الفصل 28، حيث تم تطبيق «V» مبدئيًا على المجردات الإثنانية، وطبقناه بثبات على الحدود الواحدية وأخيرًا على المجردات الواحدية فقط، مع إعادة كتابة النتائج باعتبارها تسويرًا. إن التعميم الواضح هو الذي اقترحتْهُ تلك الرحلة في الفصل 28، حيث يُنتج «V»، عند تطبيقه على حدٍّ نوني، حدًّا من الدرجة 0 (عبارة). ومع ذلك، ضع في اعتبارك هذا التعميم المختلف: مثلما يُنتج «V»، عند تطبيقه على حد من الدرجة 1، حدًّا من الدرجة 0، فإنه ينتج، عند تطبيقه على حد من الدرجة ن، حدًّا من الدرجة ن-1. وهذه هي الصيغة التي ستخدمنا.

(3) Vك^{ن} ≡ {س$_{2}$...س$_{ن}$: Vس$_{1}$ ك^{ن}(س$_{1}$س$_{2}$...س$_{ن}$)}.

أحد العوامل الأربعة المطلوبة الإضافية هو الانعكاس (reflection)، العامل الذاتي. عند تطبيقه على الحد الاثناني «يكره»، ينتج الحد الواحدي «يكره الذات».

نع ك^{2} ≡ {س: ك^{2}(س، س)}. (نع: انعكاس)

ويكون التعميم كالآتي:

(4) نع ك^{ن} ≡ {س$_{2}$...س$_{ن}$: ك^{ن}(س$_{2}$، س$_{2}$،...،س$_{ن}$)}

هناك عامل آخر هو الحشو (padding)، والذي يحشى بشكل سيئ في الكلمات. يستحضر أشياء مجانية. يُنتج عند تطبيقه على كلمة «كلب» حدًّا اثنانيًّا «حشا كلب» يربط أي شيء وكل شيء بكل كلب.

حش ك^{1} ≡ {سـ ع: ك^{1} (ع)}. (حش: حشو)

ويكون التعميم كالآتي:

(5) حش ك^{ن} ≡ {سـ$_{0}$ سـ$_{1}$...سـ$_{ن}$: ك^{ن}(سـ$_{1}$،...،سـ$_{ن}$)}.

والعاملان الباقيان هما عاملا القلب أو العكس. إن العامل الذي لا مفر منه في الحالة الاثنانية يعكس «والد...» إلى «نجل...» والمبني للمعلوم إلى المبني للمجهول. يُمكن أن يتخذ امتداده إلى الحدود النونية أيًا من السطرين الطبيعيين. سأحتاج إليهما معًا، وسأسميهما العكس الكبير والصغير.

(6) عاس ك^{ن} ≡ {سـ$_{1}$...سـ$_{ن}$: ك^{ن}(سـ$_{ن}$، سـ$_{1}$،...،سـ$_{ن-1}$)}، (عاس: العكس الكبير)

(7) عس ك^{ن} ≡ {سـ$_{1}$...سـ$_{ن}$: ك^{ن}(سـ$_{2}$، سـ$_{1}$، سـ$_{3}$،...،سـ$_{ن}$)}. (عس: العكس الصغير)

يستعمل تكرار «عاس» لتحريك أي متغير إلى الوضع الأولي. مثال ذلك:

ك^{5}(غـ فـ سـ عـ هـ) ↔ (عاس ك^{5}) (فـ سـ عـ هـ غـ) ↔ (عاس عاس ك^{5}) (سـ عـ هـ غـ فـ).

غير أن هذه المناورة تبعثر ترتيب باقي المتغيرات؛ إذ تدفع المتغيرين الأخيرين القديمين «عـ هـ» إلى الأمام. والآن يُمكن تصحيح هذا التبعثر بواسطة مناورة ثانية تبعد متغيرًا المكان الثاني إلى الطرف الأقصى. إننا نطبق «عس» ثم «عاس» على النحو الآتي:

(8) ل^{5}(سـ عـ هـ غـ فـ) ↔ (عس ل^{5}) (عـ سـ هـ غـ فـ) ↔ (عس عس ل^{5}) (سـ هـ غـ فـ عـ).

ويُمكننا عبر تكرار هذه المناورة أن نبعد «هـ» بدورها فننتهي إلى الترتيب المطلوب: «سـ غـ فـ عـ هـ». وهو ما نوجزه كالآتي:

ك^{5}(غ، ف، س، ع، هـ) ↔ (عاس عس عاس عس عاس عس ك^{5}) (س، غ، ف، ع، هـ).

يتضح من خلال ذلك أن تكرار استعمال «عاس» يُمكننا من تحريك أي متغير إلى الوضع الأولي ويعيد رغم ذلك ترتيب باقي المتغيرات. بَيد أن هذا يعني أننا نستطيع إنجاز أي قلب مهما كان، خلال البناء تراجعيًا من اليسار إلى اليمين. يكفي دفع المتغير الأخير المطلوب نحو الوضع الأولي، ثم دفع المتغير ما قبل الأخير المطلوب نحو الوضع الأولي أمامه، وهكذا دواليك.

وعندما نستحضر «نع» نستطيع أن نحذف كل المتغيرات المتكررة. نقلب أولًا ترتيب الوضع الأول ثم نطبق «نع»؛ نظرًا لـ:

ك^{ن}(س$_{2}$، س$_{2}$،...،س$_{ن}$) ↔ (نع ك^{ن}) (س$_{2}$،...،س$_{ن}$).

وبواسطة «حش» نستطيع أن نلقي بأي متغير جديد، مهما كان غير ذي صلة؛ نظرا لـ:

ك^{ن}(س$_{1}$،...،س$_{ن}$) ↔ (حش ك^{ن}) (س$_{0}$، س$_{1}$،...،س$_{ن}$).

بعد ذلك نستطيع تغيير موضع المتغير الجديد كما نريد بواسطة القلب.

هكذا تكون العوامل الأربعة المضافة هي التي تنجز كل العمل التركيبي للمتغيرات. إنها تكفي لمجانسة أي حملين -أي تزويدهما بسلاسل متطابقة من المتغيرات مهما كان بالفعل ترتيبها- الخالية من التكرار. على سبيل المثال، إن الحملين غير المتجانسين: «ك^{5}(ف، هـ، ف، س، ع)» و«ل^{4}(غ، س، ع، هـ)» مكافئان تحققيًا للحملين المتجانسين الآتيين:

(9) (حش نع عس عس ك^{5}) (غ، ف، س، ع، هـ)، (عس حش ل^{4}) (غ، ف، س، ع، هـ).

سأُظهر الآن أن العوامل السبعة، المطبقة بالتكرار على الحروف الحدية، مطابقة لمنطق التسوير بأكمله. تسقط المتغيرات المقيدة، وتبقى العوامل والأحرف التصويرية للحدود.

تتم الترجمة على النحو التالي: ترجم السور الكلي إلى السور الوجودي والنفي بالطريقة المعتادة، ثم ترجم كل دوال الصدق إلى النفي والوصل. ضع الأس على رأس الأحرف الحدية وَفقًا لعدد المتغيرات المُرفَقة، وقم بتغيير أي أحرف عبارية مثل «ب» و«ج» وغيرهما إلى «ك^{0}» و«ل^{0}» إلخ.. حيثما يكون الحمل منفيًا، طبِّق النفي بالأحرى على الحرف الحدي. وحيثما يرد حملان في الوصل، قم بمجانستهما على النحو الوارد أعلاه، ثم اختزل وصلهما إلى حمل لحد وصلي؛ نظرًا لأننا نحصل، عن طريق (2) على:

ك^{ن} (سـ$_{1}$،....،سـ$_{ن}$) .∧ ل^{ن}(سـ$_{1}$،....،سـ$_{ن}$) .↔ (ك^{ن} ل^{ن}) (سـ$_{1}$،....،سـ$_{ن}$).

وبالاستمرار على هذا النحو، نختزل كل سور أعمق إلى سور وجودي لحمل واحد. سيكون حدّه مركبًا، عادة ما يتكون من أحرف الحدود بواسطة العوامل؛ وسنزيد الآن من تعقيده من خلال تطبيق عوامل كافية لسحب المتغير المسوَّر إلى الموضع الأولي دون تكرار. سيصبح التسوير: «Vسـ حا(سـ، ع$_{1}$،....،ع$_{ن}$)»، حيث يُمثِّل الحرف «حا» حدًّا مركبًا. ويُختزل هذا التسوير بدوره، بواسطة (3)، إلى «(Vحا)(ع$_{1}$،....،ع$_{ن}$)». لم يعد المتغير المقيد «سـ» موجودًا. مع استمرار الترجمة، تصبح الأسوار التي لم تكن داخلية في معظمها كذلك وتتخلص من متغيراتها المسوّرة بدورها. هكذا تُختزل جميع الصيغ المسورة المحصورة، التي لا تحتوي على متغيرات مطلقة، إلى الحدود المركبة من الدرجة 0 التي تم إنشاؤها من أحرف الحدود من قبل العوامل السبعة السالفة الذكر.

في متناولنا المزيد من الاقتصاد. نبهني جورج ميرو (George Myro) سنة 1971 إلى أننا إذا اعتمدنا، بدل «عاس (Inv)» و«عس (inv)»، عامل قلب واحد فقط «قب (Perm)» مكافئًا لتكرار«عاس عس (Inv inv)» المُوضّح في (8)، فإن كل عمل «عاس (Inv)» و«عس (inv)» معًا يُمكن إجراؤه بواسطة

«قب» و«V» و«حش».[1] وهكذا تتقلص عواملنا السبعة إلى ستة.

لمحة تاريخية: كان شونفينكل (Schönfinkel) سنة 1924 أول من قام بتحليل العمل التوافقي للمتغيرات من خلال حذفها لصالح الدوال التوافقية. منذ أن تأسس **المنطق التوافقي** (Combinatory logic)، منذ ذلك الحين قد تراكمت مؤلفات جوهرية، على رأسها كتابات هاسكل بروكس كوري (H.B Curry). يختلف هذا النهج عن النهج الحالي في أن موجِّداته (combinators) ليست مجرد عوامل مثل عواملنا، يُمكن تطبيقها على الحدود، بل حدود في حد ذاتها، أي حدود شخصية، وأسماء للدوال. وبالتالي فهي قابلة للتطبيق على نفسها وعلى بعضها البعض، في حين أن العوامل الحالية تنطبق فقط على الحدود لتُشكِّل حدودا جديدة، ولا تنطبق أبدًا على نفسها أو على بعضها البعض. ونتيجة لذلك، فإن ترميز شونفينكل-كوري قوي مثل نظرية المجموعات العليا، وليس محميًّا بسهولة من المعوصات (ب .V. تحت (infra))، في حين أن الترميز الحالي مكافئ فقط لترميز نظرية التسوير.

يعود تاريخ الصورة الحالية إلى «التفسير المباشر للمتغيرات (Variables explained away)» (1960)، بصرف النظر عن التفاصيل السطحية. ولها بعض التقارب مع «الجبر الأسطواني (cylindrical algebras)» لتارسكي (1952) و«الجبر المتعدد (polyadic algebra)» لهالموس ((Halmos 1956))، وتقارب أكثر مع الجبر الأسطواني المعدل من قبل بيرنايس (1959).

(1) يُمكن ملاحظة ذلك بمساعدة كتابي: أساليب المفارقة (1976 *Ways of Paradox*)، ص. 298. إن عامل المحصول هناك هو العامل «V» هنا.

تمارين

1. تحقق بخطوات تحويل صريحة من أن «ك^{5}(ف، هـ، ف، س، ع)» و«ل^{4}(غ، س، ع، هـ)» مكافئتان لـ (9).
2. قم بتحويل الصيغة «∧س (∨ع ك(س، ع) ← ∧ع ∨هـ ل(ع، س، هـ) خطوة خطوة إلى حد مركب مبني من «ك^{2}» و«ل^{3}» بواسطة عوامل الحد.

46 الفئات

إن الخلط بين الحدّ الكلي، الذي يصدق على كل من المواضيع الملموسة المختلفة، والحد الشخصي الذي يسمّي موضوعا مجردًا، ليس جديدًا ولا غير شائع. إن الكلمة نفسها قادرة على لعب كلا الدورين. فكلمة «أحمر» تصدق على كل موضوع أحمر ويمكن أن نقول أيضًا إنها تسمي خاصية، أي لون. و«إنسان» يصدق على كل إنسان ويمكن أن يقال أيضًا إنه يسمي فئة، أي الإنسانية.

إن الفئات والصفات والخصائص، إن وجدت، مواضيع مجردة. لا أميز بين الصفات والخصائص. ولا يوجد أي داع لتمييز الفئات عن الخصائص باستثناء في نقطة واحدة: الفئات ماصدقية. ما يعنيه هذا هو كونها تعتبر متماثلة عندما تكون لها العناصر نفسها. إذ يُمكن للخصائص، مثل امتلاك قلب وامتلاك الكلى، أن تكون خصائص لجميع الأفراد أنفسهم ومع ذلك يتم تمييزهم. ما الذي يجعل هُويّة الخصائص غير محددة جيدًا: إننا نميل إلى أن نكف عن الحديث الفضفاض عن الماهية في مقابل العَرَض، الضرورة مقابل الاحتمال. أو ما شابه ذلك. وبالتالي، على الرغم من حقيقة أن «الخاصية» أو«الصفة» مألوفة في اللغة اليومية أكثر من«الفئة»، فإنني أفضل هذه الأخيرة.

هناك أوجه تشابه في سلوك الحدود الكلية والحدود الشخصية تشجع على الخلط بينهما، وقد يكون هذا الخلط أساس الاعتقاد في هذه المواضيع المجردة، سواء كانت فئات أو خصائص. وليكن ما يكون، يجب أن نقدر

النتيجة: من أجل افتراض الخصائص، أو بالأحرى الفئات، نُفِّذت الموارد النظرية للغة لدينا بطرائق لا غنى عنها للعلم وحتى للكثير من الاتصالات غير العلمية. سنشير في الوقت الحاضر إلى بعض الأمثلة.

لقد تجلى الخلط بذاته في استعداد بعض علماء المنطق للسماح للأحرف الحدية التصويرية «ك»، «ل» إلخ.، بأن تندرج تحت الأسوار كما لو كانت متغيرات. وهكذا فإن ما كان يمثل حروفًا تصويرية بالنسبة إلى الحدود أضحى مقيّدًا كمتغيرات تقبل مواضيع من نوع ما باعتبارها قيمًا، ربما خصائص، أو بالأحرى فئات. عند هذه النقطة، يحدث خلطان: يتم خلط الحدود الكلية بأسماء الفئات، ويتم خلط الحروف التصويرية بالمتغيرات.

أقترح الآن مواكبة أول هذين الخلطين. ربما بدأ الخلط، لكن يُمكن اتباعه دون التباس. يُمكننا أن نسند إلى الحد مهمة مزدوجة عن عمد، إذ نجعله يصدق على كل إنسان وفي الوقت نفسه يسمّي فئة، أي الإنسانية. يُمكننا أن ندع الحدود الكلية تتضاعف كأسماء لماصدقاتها. سنكتشف في الفصل 48 أنه لا يُمكننا إسناد هذه المهمة الإضافية لكل حد كلي، بسبب التناقضات؛ لكننا نستطيع إسنادها بشكل انتقائي.

أما خلط الحروف التصويرية بالمتغيرات فلا يفيدنا على الإطلاق ويولد الغموض فقط. إذا كان هناك من بد لوجود الفئات فلتكن هي قيم المتغيرات العادية «س»، «ع»، إلخ. مثل أي شيء آخر، يستمر الحرف التصويري في تمثيل الحدود الكلية، وبقدر ما يسمح لهذه الحدود الآن بمضاعفة أسماء الفئات، فإنّها تمثل، باعتبارها حرفًا تصويريًا، أيضًا أسماء الفئات؛ لكن هذا لا يجعلها مع ذلك متغيرًا قابلًا للتقييد.

يمكن كتابة «يوجد أناس» كما يلي: «Vس (إنسان س)». ويمكن كتابة «يوجد إنسان» – هنا يتضاعف الحد باعتباره اسم فئة- كالآتي: «Vس (س = إنسان)». كما يُمكن كتابة توجد «أرواح بلا جسد» كما يلي:

Vسـ (بلا جسد سـ .∧ روح سـ)

أو ما يكافئه،

V{سـ: بلا جسد سـ .∧ روح سـ}

(انظر الفصل 22). ومن ناحية أخرى، تتم كتابة أنهم يشكلون فئة كالآتي:

Vعـ (عـ = {سـ: بلا جسد سـ .∧ روح سـ}).

إن ترميز نظرية المجموعات الخاصة بالتجريد، الذي تم إسناده في الفصول السابقة إلى الجملة الموصولة أو مجرد الحد، قد عاد الآن إلى مسكنه. إنه يتضاعف الآن، مثل الحدود الكلية الأخرى، باعتباره اسم فئة.

تم تخصيص إبسيلون، جنبًا إلى جنب مع ترميز التجريد، كرابطة بديلة للتجاور من أجل التعبير عن الحمل: «سـ ∋ ك» بدل «ك(سـ)». لم يتم استخدام سوى القليل منه في ذلك الوقت. والآن بعد أن أصبحت الحدود الكلية تؤدي مهمة مزدوجة باعتبارها أسماء الفئات، فإن إبسيلون بالمثل يعود إلى مسكنه: يتعلق الأمر بالتعبير عن العضوية وكذلك الحمل. تكون هناك حاجة بالفعل إلى ذلك عندما يتعلق الأمر بالفئات باعتبارها قيما للمتغيرات؛ يُمكننا كتابة «سـ ∋ عـ» حيث سيكون القراء في حيرة أمام تجاور «عـ سـ» على الرغم من درايته بـ «ك(سـ)». عندما يستخدم إبسيلون هكذا قبل أسماء الفئات أو المتغيرات، يتغير وضعه النحوي من كونه رابطة إلى كونه حدًّا كليًّا اثنانيًّا. وفي «سـ ∋ عـ» يحمل الحد الكلي إبسيلون على سـ وعـ.

ما قلته عن إبسيلون ينطبق تمامًا على العاملين «⊇» و«⊃»، اللذين كانا ينتميان تقليديًّا إلى نظرية المجموعات، لكن عندما ظهرا في الفصل 20 كانا بالأحرى رابطتين مثل إبسيلون. والآن بعد أن أصبحت الحدود الكلية تقوم بمهمة مزدوجة باعتبارها أسماء فئات، فإن «⊇» و«⊃» تقومان مثل إبسيلون بمهمة مزدوجة باعتبارهما حدودًا كلية اثنانية؛ وبالتالي «سـ ⊇ عـ»، «سـ ⊃ عـ».

تلقى العامل «≡» في الفصل 20 المنزلة نفسها التي لـ «⊇» و«⊃»: منزلة الرابطة التي تستخدم بين الحدود الكلية. عندما تتضاعف الحدود الكلية باعتبارها أسماء فئات، تتخذ «≡» منزلة ثانية في المقابل، إذ تصير مثل «⊇» و«⊃» لتكون بمثابة حد كلي اثناني بين المتغيرات أو أسماء الفئات. ولكن ما الحد الكلي الاثناني؟ إنه بالضبط «=»! وَفقًا لذلك، أكتب «سـ = ع»، وليس «سـ ≡ ع»: أكتب «=» بدلًا من «≡» في أي مكان نهتم فيه بشكل لا لبس فيه بالأسماء بدلًا من الحدود الكلية التي قد تتضاعف أو لا تتضاعف باعتبارها أسماء فئات.

كان استخدام «=» بدلًا من «≡» منذ البداية، في الفصل 20، سيكون أكثر انسجامًا مع معالجتي لـ «∋» و«⊇» و«⊃». كان بإمكاني المضي قدمًا في شرح أنني كنت هناك أستعمل «=»، مثل «∋» و«⊇» و«⊃»، كرابطة وليست حدًّا كليًّا اثنانيًّا يصدق على المواضيع. ومع ذلك، كان من الممكن أن يكون ذلك بمثابة إفراط في الحماس المتحذلق وخطرًا على التفكير الواضح. من الأسلم تخصيص «=» بشكل واضح لتماثل الأشياء وترك تساوي الحدود الكلية لـ «≡».

إلى حد ما، يُمكن تفسير قبول الفئات كقيم للمتغيرات من حيث اتساق وصحة الصيغ المسورة. لتأكيد أن:

Λع [Λسـ (سـ ∋ ع) ← Vمـ (مـ ∋ ع)]،

Vع [Vسـ (سـ ∋ ع) . Λ ¬Λمـ (مـ ∋ ع)]

تساوي فقط إثبات صحة الصيغة «Λمـ ك(سـ) ← Vسـ ك(مـ)» واتساق «Vسـ ك(سـ) .Λ ¬Λسـ ك(سـ)». إن مثل هذا الاعتبار مثير للاهتمام لأنه يفسر، في حدوده، العبارات المتعلقة بالفئات دون افتراض مسبق للفئات. يتم استخدام مفهومي صحة التسوير واتساقه. لقد اكتشفنا في الفصل 33 أن هذين المفهومين يُمكن تحديدهما بواسطة القواعد الاستنباطية، أو مرة

أخرى بواسطة الإنابة، دون الاعتماد على مفهوم الفئة.

هكذا يُمكن تفسير عبارة حول الفئات كلما كانت أسوار فئاتها، كما سأسميها، كلها شاملة، وكانت، علاوة على ذلك، جميع أسوارها، التي توجد تحت مدى سور فئتها الأخير، كلية أو كلها وجودية. (أعني هنا بسور الفئة فقط، كل سور يتكرر متغيره بعد إبسيلون). إذا كانت كلية، فإن صدق العبارة يرقى إلى الصيغة المسوّرة المقابلة؛ أما إذا كانت وجودية، فإنها ترقى إلى اتساق الصيغة. مثال ذلك صدق العبارتين:

∧سـ∧هـ [سـ ∈ هـ .← ∨عـ (عـ ∈ هـ)]،

∨هـ∨فـ∧سـ (سـ ∈ هـ .↔. سـ ∈ فـ)

من نظرية المجموعات، اللتين ترقيان إلى صحة واتساق الصيغتين ذات الصلة:

ك(سـ) ← ∨عـ ك(عـ)،   ∧سـ (ك(سـ) ↔ ل(سـ))

من نظرية التسوير.

يمكن دفع هذه الحيلة قليلًا عن طريق تحريك الأسوار الداخلية نحو موقع الأسوار الشاملة بالطريقة المعتادة. هكذا يُمكن تحويل العبارة:

∨هـ[∧فـ∧سـ (سـ ∈ فـ .←. سـ ∈ هـ) ← ∨عـ∨سـ (سـ ∈ عـ .∧ سـ ∈ هـ)]،

باستخدام أسوار الفئة المركوبة «∧فـ» و«∨عـ» يُمكن تحويلها إلى:

∨هـ∨فـ∨عـ [∧سـ (سـ ∈ فـ .←. سـ ∈ هـ) ← ∨سـ (سـ ∈ عـ .∧ سـ ∈ هـ)]،

والتي يُمكن تفسيرها باعتبارها مجرد إثبات في الواقع لاتساق الصيغة المسوّرة:

∧سـ (ل(سـ) ← ك(سـ)) ← ∨سـ (م(سـ) .∧ ك(سـ)).

لا يُمكن تفسير قوانين الفئات بالطريقة المذكورة أعلاه. ومع ذلك، عندما تكون أسوارها الشاملة كلية ووجودية بشكل مختلط كما في الأمثلة:

∧هـ∨فـ∧سـ (سـ ∈ هـ .↔. سـ ∈ فـ)،

∧سـ∧عـ∨هـ (سـ ∈ هـ .↔. عـ ∈ هـ).

يكون من المناسب أن نبحث في مثل هذه العبارات عن المضمون غير القابل للاختزال إلى نظرية المجموعات أو نظرية الفئات، بل وحتى في تلك العبارات المُتضمِّنة لأسوار الفئات المركوبة، التي ما إن تنتقل إلى موقع السور الشامل بفضل قواعد تحرك الأسوار، حتى تصبح كلية ووجودية معًا. مثال ذلك:

∧سـ∧عـ [∧هـ (سـ ∈ هـ .←. عـ ∈ هـ) ← ∧فـ (عـ ∈ فـ .←. سـ ∈ فـ)].

غير أن هذه القدرة على التعبير عن قوانين جديدة غير قابلة للاختزال لن تعلِّل بذاتها سوى فائدة بسيطة بالنسبة إلى نظرية الفئات، ما لم يصاحبها مكسب مقابل يكمُن في زيادة القدرة من الناحية التطبيقية. والمثال الجيد يقدمه لنا تعريف الحد الاثناني «السَّلَف» بناء على «القريب [من القرابة]». وحتى نُبسِّط الوضعية، لنفهم «سلف» بالمعنى الواسع إلى حد ما، معتبرين أسلاف الشخص ليس فقط والديه وأجداده وهكذا دواليك، بل الشخص نفسه. لنرمز لـ «قريب» بـ «ك» بحيث تعني «ك(سـ، عـ)» «سـ قريب عـ». تكمُن مشكلتنا الآن في كتابة «سـ سَلَف عـ» باستعمال «ك» فقط ومختلف رموزنا المنطقية.

هناك سمة أساسية لفئة أسلاف «عـ» تتجلى في كون أقارب عناصر الفئة هم أيضًا عناصر فيها بدورهم. وهناك سمة من سماتها الأخرى تكمُن في أن عـ نفسها تنتمي إليها. غير أن هاتين السمتين لا تحددان بعد فئة أسلاف عـ بطريقة فريدة؛ إذ هناك فئات أوسع تشمل في الوقت نفسه عـ وكل أقارب عناصرها. إن فئة من هذا الصنف هي فئة أسلاف الأحفاد لـ (عـ). وهناك فئة أخرى تتكون من أسلاف عـ وربطات العنق؛ وحيث إن ربطات العنق بلا أقارب، فإن تضمينها لا يغيِّر حقيقة كون كل أقارب العناصر هم عناصر. في حين من الواضح أن كل فئة تتضمن عـ وكل أقارب عناصرها ينبغي أن تتضمن على الأقل كل أسلاف عـ، أيًا كانت الأشياء الأخرى التي يُمكن أن تتضمنها. علاوة على ذلك، إن إحدى هذه الفئات تتضمن حصريًا

أسلاف عـ وعليه، لكي يكون العنصر سَلَف عـ من اللازم والكافي أن ينتمي إلى كل فئة تتضمن عـ وكل أقارب عناصرها. وهكذا، يُمكن أن تكتب «سـ سَلَف عـ» على هذا النحو:

ينتمي سـ لكل فئة تتضمن عـ وكل أقارب عناصرها

والتي يُمكن ترميزها كالآتي:

(1) ∧ظ [عـ ∋ ظ .∧ ∧هـ ∧ف (فـ ∋ ظ .∧ ك(هـ فـ) .←. هـ ∋ ظ) .←. سـ ∋ ظ].

يقبل هذا البناء العبقري العديد من التطبيقات خارج شجرة النسب. وسنصادف منها تطبيقًا يخصّ العدد في الفصل الموالي. إن المهم في هذا البناء للأغراض الحالية يكمُن في كونه يعتمد على تسوير الفئات.

هناك مثال آخر يخص القدرة التي نكتسبها من خلال تسوير الفئات اقترحه غيتش (Geach) وطوره ديفيد كابلان (David Kaplan) في مراسلة خاصة من مراسلاته:

(2) بعض الناس معجبون ببعضهم البعض فقط.

برهن كابلان أننا لا نستطيع أن نعبر عن هذا الملفوظ بواسطة «شخص» و«أعجب» والهُوِيّة والدوال الصدقية والتسوير فقط. فـ(2) لا تستلزم وجود شخصين معجبين ببعضهما فقط. يُمكن أن يكون صحيحًا بسبب، مثلًا، وجود جماعة من أحد عشر شخصًا معجبين ببعضهم. ويمكننا بالرجوع إلى الفئات أن ننصف (2):

Vهـ (Vمـ (مـ ∋ هـ) .∧ Vمـ [مـ ∋ هـ .←. Vعـ (مـ مُعجب بـ عـ) .∧ ∧عـ (سـ مُعجب بـ عـ .←. سـ ≠ عـ .∧ عـ ∋ هـ)]).

وهناك توضيح آخر أبسط لاكتسابنا قدرة جديدة يُمكن أن نلمسه في كون رمز الهُوِيّة «=» أصبح منذ الآن قابلًا للتعريف: نظرًا لأن الأشياء تكون متماثلة فقط في حالة كانت تنتمي إلى الفئات نفسها:

سـ = عـ .↔ Λهـ (سـ ∈ هـ .←. عـ ∈ هـ).

يمكننا بعد ذلك المضي قدمًا لتعريف مجال القول أيضًا، والفئة الفارغة، والفئة التي يكون عنصرها الوحيد هو سـ والفئة التي يكون عنصريها هما سـ وعـ

V = {سـ: سـ = سـ}، Λ = {سـ: سـ ≠ سـ}.

{سـ} = {عـ: عـ = سـ}، {سـ عـ} = {هـ: هـ = سـ .V. هـ = عـ}.

لمحة تاريخية: إن التركيب الذي وضّحناه في تعريف السّلف قد تم إدخاله من قبل فريغه سنة 1879 كي يطبقه على العدد. وقد أعيد اكتشافه بشكل مستقل بعد سنوات من ذلك من قبل بيرس، ثم مجددًا من قبل ديدكيند الذي اقترحه سنة 1887 تحت اسم **طريقة السلاسل** (method of chains).

نقول إن عدد الحواريين اثنا عشر، ولكن ليس بمعنى أنهم ثقاة؛ لأننا نسند إلى كل واحد التقوى ولا نسند إليه كونه اثني عشر. فالعبارة «الحواريون ثقاة» لها الصيغة «Λسـ (ك(سـ) ← ل(سـ))» بحيث ترمز «ك» إلى «حواري» و«ل» إلى «ثقي»؛ في حين أن «الحواريون اثنا عشر» لا تشبهها من حيث الصيغة، فهي تقترب أكثر من التسوير الوجودي البسيط: «Vسـ ك(سـ)». ويمكن أن نقرأ هذا التسوير المألوف «إن الحواريين هم على الأقل واحد»؛ بحيث نستطيع بواسطة المماثلة أن نتصور الترميز الآتي بالنسبة إلى العبارة «الحواريون اثنا عشر»: V_{12}سـ ك(سـ)» باستعمال ما نسميه السور المحدَّد رقميًا.

ويمكن للأسوار المحدّدة رقميًا أن تدمج بناء على الأساس الخاص بنظرية التسوير والهُويّة، كما هو وارد في الفصل 42؛ وليس من الضروري بتاتًا أن نُسلِّم هنا بالفئات. يُمكن أن نبدأ بتفسير «V_0سـ ك(سـ)»:

V_0سـ ك(سـ) ↔ ¬ Vسـ ك(سـ).

ثم نفسر كل سور رقمي متتالٍ انطلاقًا من سابقه دائمًا بالطريقة نفسها:

(1) V_1سـ ك(سـ) ↔ Vسـ [ك(سـ) .Λ V_0عـ (ك(عـ) .Λ عـ ≠ سـ)]،

V_2سـ ك(سـ) ↔ Vسـ [ك(سـ) .Λ V_1عـ (ك(عـ) .Λ عـ ≠ سـ)]،

وهكذا دواليك. والصورة العامة هي: أن يصدق، بالنسبة إلى أي شيء، على ن+1 من الأشياء، هو أن يصدق على شيء ما غير ن الأشياء التي يصدق عليها. فبواسطة التطويرات الاثني عشر المتتالية، المنجزة طبقًا للتعريفات،

تتحول «V_{12}سـ ك(سـ)» إلى صورة من نظرية الهُويّة. وستسري الطريقة نفسها على كل تسوير رقمي محدد آخر. بيد أن هذا لا يبيّن لنا أيضًا كيف نطور «$V_{ن}$ سـ ك(سـ)» ذات متغير «ن». بإمكاننا أن نقول دون عناء، مثلًا، إنه يوجد اثنا عشر حواريًا واثنتا عشرة جنِّية، على النحو الآتي: V_{12}سـ ك(سـ) .∧ V_{12}سـ ل(سـ)»؛ غير أننا نجد صعوبات في القول ببساطة «يوجد العدد نفسه من الحواريين والجنّيات» دون أن نحدد عددهم. لا نتوفر على تعاريف تسعفنا لتطوير:

$V_{ن}$ ($V_{ن}$ سـ ك(سـ) .∧ $V_{ن}$ سـ ل(سـ)).

يقدِّر كل الطلبة ثبات متغيرات الأعداد في الجبر وبعضهم يقدّر فائدتها، ويقترح المثال السابق وأمثلة أخرى قريبة جدًّا من هذا قبيل: «يوجد من العيون ضعف ما يوجد من الوجوه» أن متغيرات الأعداد القابلة للتسوير لها مكانها أيضًا في تحليل خطاب غير رياضي في الحقيقة.

إذا كان ينبغي لنا أن نتوفر على متغيرات مسوَّرة بالنسبة إلى الأعداد، فيجب أن نكتشف داخل مجالنا الكائنات التي يُمكن أن نعتبرها بمثابة أعداد- أو نوسع مجالنا بحيث نجعله يستوعب كائنات من هذا القبيل. وكخطوة أولى نحو نظرية معقولة للأعداد، لننظر في الوصف «اثني عشر ضعفًا». وإذا كان علينا أن نقبل حدًّا من هذا النوع وليس فقط السور الذي يقابله «V_{12}سـ»، فيجب أن نقبله كحدٍّ يصدق لا على الأشخاص، كالحواريين مثلًا، بل يصدق على الفئات، كفئة الحواريين مثلًا. ويصير كحدٍّ مجرد،

اثنا عشر ضعفا ≡ {ع: V_{12}سـ (سـ ∋ ع)}.

تعتبر الخطوة المتبقية إلى الرقم 12 باعتباره موضوعًا خطوة قصيرة: اعتبر 12 ماصدقًا لـ «اثني عشر ضعفًا»، ومن ثَمَّ فئة كل فئات الاثني عشر. والآن بعد أن أصبحت المجردات والحدود الكلية الأخرى تتضاعف كأسماء لماصدقاتها،

12 = {ع: V$_{12}$سـ (سـ ∋ ع)}.

حيث هـ رقم، عندما تُفسر على هذا النحو، يعني القول إن الفئة ع لها هـ من العناصر ببساطة أن ع ∋ هـ

أول الأرقام، 0، إذًا هو {Λ}: الفئة التي يكون عنصرها الوحيد هو الفئة الفارغة. يُمكن بعد ذلك تعريف 1 على أنه تالي 0، و2 كتالي لـ 1، وهكذا دواليك، بمجرد ما نعرّف التّالي. تتضح كيفية القيام بذلك من (1): تالي هـ، أو لنسميه تاهـ هو فئة كل تلك الفئات التي تصبح، عند حرمانها من عنصر، عناصر لـ هـ وهو ما نرمز له كالآتي:

تاهـ = {ع: Vسـ (سـ ∋ ع . Λ ع -{سـ} ∋ هـ}.

ترمز هنا –{س} إلى فئة كل شيء ما عدا سـ لذا فإن الوصل ع - {س} هو فئة جميع العناصر باستثناء سـ من ع

يمكن تعريف جمع الأعداد بسهولة في هذا السياق: يكون للفئة العناصر ع + هـ إذا وفقط إذا أمكن تقسيمها إلى جزأين لهما العناصر ع وهـ لكن القول بأن الفئة فـ لها العناصر هـ يعني قول فقط إن فـ ∋ هـ: وهو ما نرمز له كالآتي:

ع + هـ = {سـ: Vظ Vفـ (سـ = ظ V فـ . Λ ظ فـ = Λ . Λ ظ ∋ ع . Λ فـ ∋ هـ)}.

يمكن تعريف الضرب في سياق مشابه: يكون للفئة العناصر ع . Λهـ إذا كان من الممكن تقسيمها إلى ع من الأجزاء لكل جزء العناصر هـ وفقط إذا؟ ليس تمامًا؛ إذ هناك استثناء حيث هـ = 0، لأنه لا يُمكن أن تكون لدينا ع من الفئات الفارغة إذا كانت ع > 1.[1] لا يزال التعريف الصوري لـ ع . Λ هـ أمرًا روتينيًا، لكنه يمتد لفترة طويلة ويمكننا تجاوزه.

ماذا الآن عن التعريف الصوري لـ «هـ عدد»، «عاهـ»؟ إن الأعداد بالمعنى

(1) أنا مدين بهذا إلى بيترغيتش.

الحالي هي 0، 1، 2، فقط...- أي 0 والأعداد الصحيحة الموجبة. أما الأعداد السالبة والكسور وغير المعقولة والخيالية فليست من النوع المستخدم في قياس حجم الفئة. ولذلك، تكمُن مشكلتنا الحالية في إيجاد تعريف لـ «عاهـ»، بحيث يصدق عندما وفقط عندما تكون هـ هي 0 أو 1 أو 2، إلخ. هناك وسيلة لبلوغ ذلك تكمُن في ما تقدمه لنا معالجة «سلف» في الفصل السابق. فمثلما أن «سلف ع» تعني «عـ أو قريب عـ أو قريب قريب عـ أو...»؛ فكذلك «عدد» تعني «0 أو عا0 عاعا0 أو...». وَفقًا لذلك، وفي تشابه وثيق مع (1) من الفصل السابق، يُمكننا تحديد ما يلي:

(2) عاهـ ↔ Λظ [0 ∈ ظ .Λ Λعـ(عـ ∈ ظ .←. عاعـ ∈ ظ) .←. هـ ∈ ظ].

ومعناها: لكي يكون العدد عددًا يجب أن ينتمي إلى كل فئة ينتمي إليها 0 وينتمي إليها تالي كل عنصر.

يدعم هذا التعريف الاستقراء الرياضي أي البرهان الأساسي في نظرية الأعداد. إننا نبرهن على أن Λهـ (عاهـ ← ك(هـ)) من خلال البرهنة على ك(0) وΛعـ (ك(عـ) ← ك(تاعـ)). ويجمل بالقارئ أن يلاحظ كيف يسوّغ (2) هذا الاستدلال.

إننا الآن في وضع يسمح لنا بالقول بأن عدد الحواريين بقدر عدد الجنيات.

Vهـ (عاهـ .Λ حواريون ∈ هـ .Λ جنّية ∈ هـ).[1]

لاحظ استخدام الحدود الكلية هنا مرة أخرى باعتبارها أسماء ماصدقاتها.

إلى جانب السماح للحدود الكلية الواحدية تظهر كأسماء، ومن ثَمَّ تفترض مجال فئات مجرد، قد نفعل الشيء نفسه بالنسبة إلى الحدود الكلية الاثنانية. وهذا يعني افتراض مجال مجرد ثان، وهو مجال العلاقات

(1) قد يجد القراء الأقل نباهة منكم أن الجنّيات تعالج هنا بقدر من التسامح أكثر من «العنقاء» (الفصل 41). فيغيب عنهم بذلك اعتبار أن مثالنا ليس من السوء بحيث يكون كاذبًا.

الاثنانية. ومع ذلك يُمكننا، في هذه المرحلة، أن نقتصد: تكفي الفئات بالفعل لتوليد مجموعة كاملة من العلاقات أو نسخ طبق الأصل معقولة خاصة بها. يُمكن تفسير العلاقة على أنها فئة من الأزواج المرتبة. فعلاقة العمومة هي فئة كل أزواج:عم-ابنة الأخ وعم-ابن أخ.

لكن ما هو الزوج المرتب؟ إنه كل مفهوم اعتباطي عن زوج من المواضيع سـ وعـ سيخدم أغراضنا تمامًا ما دام تم استيفاء هذه الشروط: (1) بالنسبة إلى كل موضوع سـ وعـ يوجد مثل هذا الزوج؛ (2) حالما يُعطى زوجٌ ما، فإنه يتم تحديد موضوعه الأول سـ بشكل فريد، وكذلك موضوعه الثاني عـ (ومن ثَمَّ، يختلف الزوج سـ وعـ عن الزوج عـ وسـ، إلا إذا كانت سـ = عـ). يحدث أن تتحقق هذه الشروط عندما يتم تعريف الزوج سـ وعـ، وعندما تكتب «⟨سـ، عـ⟩»، يعرّف بشكل اعتباطي كالآتي:

(3) ⟨سـ عـ⟩ = {{سـ}، {سـ، عـ}}

——ومن هنا تمثل فئة الفئات التي تتضمن كعناصر فقط الفئات {سـ} و{سـ، عـ}.

وبالتالي، فإن تجريد الحد الاثناني يُختزَل إلى الواحدي، على النحو الآتي:

{سـ عـ: ...سـ...عـ...} ≡ {هـ: Vسـ Vعـ (هـ = ⟨سـ عـ⟩. ٨...سـ...عـ...)}.

مثل كل حدٍّ واحديٍّ مجرد، يستمر في العمل كحدٍّ كليٍّ إلى جانب القيام بمهمة مزدوجة باعتباره اسمًا ضمن هذه الحدود التي قد تفرضها المعوصات على وجود الفئة. إذ تكون في بعض الحالات:

Vهـ (هـ = {سـ عـ: ...سـ...عـ...})،

ولا تكون كذلك في أحيان أخرى.

تخضع الحدود الواحدية، مثل كل الحدود الاثنانية، تلقائيًا للعوامل البولية. قد يُنظر إلى هذه على أنها مُعرَّفة بواسطة التجريد كما في (8)-(12) من الفصل 21. كما أن الحدود الاثنانية تبشر بتشكيلة مفيدة من العوامل

الأخرى. الواضحة منها هي العكس، أو النقض، والانعكاس: إنها ببساطة تكرر «عس ك^2» و«نع ك^2» من الفصل 45. علاوة على ذلك، هناك حاصل الضرب الديكارتي والمحصّلة والصورة المحددة على النحو التالي:

ك × ل ≡ {سـ عـ: ك(سـ) .٨ ل(عـ)}،

ك / ل ≡ {سـ عـ: Vهـ (ك(سـ هـ) .٨ ل(هـ، عـ)}،

ك"ل ≡ {سـ: Vعـ (ك(سـ عـ) .٨ ل(عـ)}.

وهكذا فإن «قطة × كلب» تربط كل قطة بكل كلب. «أم / القريب» تُكافِئ «الجدة» والمحاربين" القدامى هم قدامى الحروب.

إن الترابط علاقة لا يقيمها أي موضوع مع أكثر من موضوع واحد، ولا يقيمها موضوعان مع أي واحد. مرة أخرى، نستطيع أيضًا تكييف التعريف مع الحدود الكلية الاثنانية بغض النظر عما إذا كانت أسماء علاقات أم لا، على النحو الآتي:

ترك ↔ ٨سـ ٨عـ ٨هـ (ك(سـ هـ).٨ ك(عـ، هـ).V. ك(هـ سـ) .٨ ك(هـ، عـ) :←. سـ = عـ).

يوفر هذا طريقة ثانية للقول بأن عدد الحواريين يعادل عدد الجنِّيَات: بينهم علاقة ترابط. للقول بأن ك ول مترابطان، هناك ترميز قديم ، «شه» لـ «مشابه»:

ك شه ل .↔ Vسـ (ترسـ .٨ ك ≡ سـ"ل .٨ ل ≡ (عس سـ)"ك). (تر: ترابط)

تم التعامل مع الأعداد أعلاه كأحجام للفئات. أي كونها 0 فقط والأعداد الصحيحة الموجبة، إلا أنها كانت أحجام الفئات المتناهية فقط. إن الأعداد الأولية، كما تسمى في نظرية المجموعات، أكثر شمولًا؛ إذ تقيس أيضًا الفئات اللانهائية. الآن مثلما فُسِّرت الأعداد الأولية المتناهية على أنها فئات ذات أحجام متشابهة، قد يتم تفسير الأعداد اللانهائية. بشكل عام، إن العدد

الأولي للفئة سـ متناهية أو لامتناهية، هو{ع: ع شه س}. قد يفترض المرء أن جميع الفئات اللانهائية متشابهة في الحجم، وبالتالي يوجد على الأكثر عدد واحد لانهائي؛ وهذا من شأنه أن يفترض أن أي فئتين لامتناهيتين تكونان مترابطتين. بعيدًا عن الوضوح، يُمكن إبطال هذا الأمر بالنسبة إلى المجالات الواسعة؛ انظر نظرية المجموعات ومنطقها، الفصل 28.

إن طرق تفسير الأعداد متاحة لكنها مختلفة تمامًا عن تلك التي درسناها. هناك بديل أنيق، يُتبنّى على نطاق واسع في الوقت الحاضر. يعتبر 0 ببساطة Λ ويعتبر «تاهـ» هو «هـ ∨ {هـ}». هكذا يصير كل عدد فئة كل الفئات السابقة. فيرجئ تعريف (2) لـ «عاهـ»، مُستعمِلًا الصيغتين الجديدتين لـ «0» و«عا». كما تمتد هذه الصيغة للعدد بدقة إلى اللانهاية، غير أنني لن أتابعها.

كان القول بأن عـ لها العناصر هـ يعني ببساطة القول، في الصيغة الأولى للعدد، إن عـ ∋ هـ لكن كيف سنعبر عن ذلك الآن؟ سيكون الجواب بديهيًا عندما نفكر في أن كل عدد هـ له هـ من التوالي، بما في ذلك 0، ومن ثم، حسب الصيغة الجديدة، عناصر هـ إن القول بأن عـ لها العناصر هـ يعني القول بأن عـ شه هـ

لمحة تاريخية: يوجد تعريف رقمي للتسوير المتناهي بالفعل لدى فريغه (1884). والشيء نفسه يسري على تأويل الأعداد كفئات لفئات ذات أحجام ملائمة، وكذلك حال تعريف (2) لـ «عاهـ». يرجع الفضل في الصيغة البديلة الأنيقة للعدد، التي ترد في الفقرة الأخيرة، إلى فون نويمان (von Neumann) (1923). أما نظرية الأعداد اللامتناهية فتعود إلى كانتور (1890)، فهو الذي عرف تساوي أحجام الفئات بواسطة ترابط عناصرها، وأثبت انطلاقًا من بعض الافتراضات المعقولة لنظرية المجموعات، أنه لا وجود للاتناهٍ أكبر.

يجد جبر العلاقات القديم أصوله لدى كل من دي مورغان وبيرس،

وبشكل جزئي في نظرية الزمر (Theory of Groups) لكايلي (Caylely) (1854). انظر أعلاه في نهاية الفصل 27. وقد كان فيينر (Wiener) سباقًا، سنة 1914، إلى تقديم بناء عام للزوج المرتب قابل للتطبيق. وتعتبر الصيغة المستعملة هنا صيغة بديلة تعود إلى كوراطوفسكي (Kuratowski).

تمارين

1. حيث

ك ≡ {سـ عـ: سـ إنسان .٨ عـ لحظة .٨ سـ حي في عـ}،

ل ≡ {عـ: عـ لحظة في 1950}

ترجم هذه الحدود الأربعة بشكل طبيعي إلى حد ما إلى اللغة الطبيعية:

ك"ل،   ك"⌐ل،   ⌐(ك"ل)،   ⌐(⌐ك"ل).

2. هب أن «ك» و«ل» ترمزان إلى «معجب به» و«أخو». ترجم هذه الحدود السبعة بشكل طبيعي إلى حد ما إلى اللغة الطبيعية:

⌐ (ك/ل)،   (عس ك)/ ل،   ك/ (عس ل)،   (عس ك)/ (عس ل)،

عس ((عس ك)/ ل)،   (عس ⌐ك)/ ل،

⌐ ((عس ك) / (عس ل)).

3. جِد تأويلات لـ «ك» و«ل» و«م» و«ن» بحيث إن:

⌐ [(ك ل)"م ≡ (ك"م)(ل"م)]،

⌐ [ك"(م ن) ≡ (ك"م)(ك"ن)].

علِّل جوابك.

4. برهن أن (3) تستوفي المطلب (2) الخاص بالأزواج المرتبة.

5. وضِّح بعبارات لا لبس فيها تعليل الاستقراء الرياضي بواسطة (2).

48 نسق نظرية المجموعات

لقد رأينا أمثلة لما يُمكن التعبير عنه في نظرية المجموعات. تتألف العينة الرئيسة من الأعداد الأولية المتناهية. يُمكن للمرء أن يستمر في تعريف الأعداد المعقولة والأعداد غير المعقولة والأعداد الخيالية والدوال. وفي الواقع الجهاز الكامل للرياضيات الكلاسيكية. دون تجاوز الترميز المقتصد لنظرية المجموعات. علاوة على ذلك، يُمكن أن يكون هذا الترميز مقتصدًا جدًا حقًا. كل ما هو مطلوب، إلى جانب التسوير والدوال الصدقية، هو إبسيلون الانتماء. ليست هناك حاجة إلى التجريد. إذ يُمكن تعريفه عن طريق الوصف على النحو التالي:

(1) {س: ك(س)} = (ıع) ∧س (س ∈ ع .↔ ك(س))

ويمكن حذف الوصف كما في الفصل 44. يغطي هذا التعريف التجريد فقط في استخدامه كاسم فئة وليس في استخدامه الأوسع كحد كلي؛ غير أن هذا الاستخدام الأوسع إرشادي ويمكن الاستغناء عنه.

تظهر الحروف التصويرية للحدود في خطابنا حول رموز كل من المنطق ونظرية المجموعات، كما هو الحال الآن، وتظهر الحدود من جميع الأنواع في عبارات تجمع بين نظرية المجموعات والموضوعات الأخرى في تطبيق نظرية المجموعات على العالم. ومع ذلك، لا توجد في العبارات الفعلية لنظرية المجموعات، أحرف تصويرية -لا تحتوي العبارات أبدًا على هذه الأحرف- علاوة على ذلك، ليست هناك حاجة إلى التجريد، وذلك بفضل (1)، ولا أي داع لأي حد كلي باستثناء إبسيلون نفسه. كما لاحظنا في الفصل 46، يظهر

إبسيلون في هذه السياقات باعتباره حدًّا كليًّا اثنانيًّا.

إن اختزال الجهاز المفاهيمي الواسع للرياضيات الكلاسيكية إلى هذه الكبسولة الصغيرة هو سبب الاهتمام بنظرية المجموعات. يميل المتخصصون أيضًا إلى الاهتمام بالرياضيات الخالصة الخاصة باللانهايات العُليا، بغض النظر عن ترجمة أو نمذجة الرياضيات الكلاسيكية.

انشغلت، في هذه الصفحات حول نظرية المجموعات، بأسئلة التعريف وليس بالمسلّمات والبرهان، لكنني ذكرت أن هناك معوصات تقف في طريق معالجة جميع الحدود الكلية باعتبارها أسماء لماصدقاتها. أبسط وأشهر هذه المعوصات هي مفارقة راسل (Russell's paradox). تجسدها ((13) من الفصل 21)،

(1) ع ∋ {سَ: ¬ (سـ ∋ س)} .↔ ¬(ع ∋ ع)،

لكن لا توجد مثل هذه الفئة؛ فإذا اعتبرنا ع هي هذه الفئة، يُمكننا استنتاج من (1) أن:

ع ∋ ع .↔ ¬(ع ∋ ع)

تناقض. تصدق (1) بالفعل على كل موضوع ع، لكن

(2) ¬ Vع (ع = {سَ: ¬(سـ ∋ س)}).

تعتبر هنا، على الرغم من كل سلبيتها، مُسلّمة صغيرة ثابتة لنظرية المجموعات.

يقبل التناقض المتغيرات والتنميق، المتقاربة بدرجات متفاوتة، ولا توجد طريقة لفصلها بدقة. هناك أزواج من المجردات التي يُمكن اعتبارها باستمرار تسمية فئة، ولكن ليس كلهما. لا يُمكننا استبعاد الفئات المذمومة دون استبعاد الفئات الحميدة أيضًا، في ربع أو آخر، وبالتالي هناك العديد من أنساق المسلّمات البديلة أو براهين البت، التي تختلف عن بعضها البعض في ما يتعلق بالفئات المقبولة والمستبعدة. قد يتفوق أحد الأنساق

في البساطة من بعض النواحي، وقد يتفوق الآخر في الطبيعة في نواحٍ أخرى. وقد يكون أحد الأنساق أكثر جرأة وأكثر غنًى في إنتاجه للمبرهنات، والآخر أكثر فقرًا، ومن ثَمَّ أقل احتمالية لإظهار عدم الاتساق. إن النسق الأكثر استخدامًا من قبل المتخصصين اليوم هو نسق زيرميلو (Zermelo) أو الأقرب منه. سأقوم بعرض مختصر لنسق زيرميلو.

أكثر الافتراضات المميزة لوجود الفئة هو صورة المُسلَّمة:

Vهـ (هـ = {ع: ع ∋ سـ. ٨ ك(ع)})،

التي تؤكد وجود أي فئة فرعية محددة من أي فئة معطاة سـ نظرًا لأنها تنتج فئات من الفئات السابقة فقط. هناك حاجة إلى مزيد من مسلَّمات الوجود لنشرع في ذلك. لقد حصلنا على هذه:

Vهـ (هـ = {سـ ع})،

Vهـ (هـ = {ع: ع ⊇ سـ})،

Vهـ (هـ = {ع: Vف (ع ∋ ف. ٨ ف ∋ سـ})).

إنَّ اتجاه النسق هو وجود فئة ما لم تكن كبيرة جدًّا. نتيجة ذلك، لا يُمكن لزيرميلو استخدام صيغة فريغه للأعداد التي تمت دراستها في الفصل السابق؛ سيكون كل عدد يفسر على هذا النحو، باستثناء 0، فئة أكبر من أن توجد. لكن صيغة فون نويمان في نهاية ذلك الفصل تعمل بشكل جيد للغاية.

لا يحتاج زيرميلو إلى فئات لانهائية، ليس فقط لانهائية بشكل مفرط. نظرًا لكون المسلَّمات السابقة متواضعة للغاية في هذا الصدد، فقد أضاف مُسلَّمة توفر فئة لانهائية. خفتت مسلَّمات أخرى خلال التخمين المتزايد: مُسلَّمة الاختيار وفرضية الاستمرارية، إن أردنا إعطاءهما اسمين. لا يوجد مكان توقف واضح، لأننا يجب ألا نطمح إلى النسق التام. يتضح هذا جيدًا من إثبات غودل لعدم تمام نظرية الأعداد (الفصل 34)، لأنه يُمكن صياغة نظرية الأعداد في نظرية المجموعات.

ساهم فون نيومان أيضًا في نظرية مجموعات خاصة به. لقد تميزت عن نظرية زيرميلو من خلال قبول بعض الفئات الإضافية. الفئات الواسعة، في وضع هامشي: تم اعتبارها غير قادرة على أن تكون عناصر في فئات أخرى. هنا تم العثور على استخدام نافل للحدود. «المجموعة» و«الفئة»: تخصص «المجموعة» للفئات التي يُمكن أن تكون عناصر. إذ يُمكن ترميز كون سـ مجموعة كالآتي: «Vهـ (سـ ∋ هـ)». يُمكن افتراض الفئات دون قيود ما دامت عناصرها محصورة في المجموعات، وإن كان فون نويمان لم يذهب إلى هذا الحد. ثم يأتي عبء مسلَّمات الوجود الإضافية عند قول ما الفئات التي يجب اعتبارها مجموعات. يعتبر فون نويمان فئات زيرميلو مجموعات. وبالتالي، تكون الفئات مجموعات بالنسبة إلى فون نويمان متى لم تكن كبيرة جدًّا.

ابتعدنا خلال هذه الفصول الثلاثة الأخيرة، عن المنطق بالمعنى الخالص بشكل غير واضح ولكن بشكل حاسم، وانتقلنا إلى فرع آخر من الرياضيات، أي نظرية المجموعات. يحدث الانتقال عندما تتم الإجابة عن السؤال، أو حتى صياغته، المتعلق بالفئات الموجودة: أي الفئات من بين حدودنا الكلية يجب أن تنجح في المضاعفة باعتبارها أسماء. بسبب الفشل الشائع في فهم التمييز ذاته بين الحدود الكلية وأسماء الفئات، غالبًا ما ذهب العبور من المنطق إلى نظرية المجموعة أدراج الرياح على مر السنين. تم اعتبار معظم نظرية المجموعات بشكل غامض منطقًا والعكس صحيح. غير أن التمييز دقيق وهام. تعالج نظرية المجموعات، مثلها مثل الكثير في الرياضيات، ومثل العلوم الطبيعية أيضًا، مجالها الخاص من المواضيع. في حين أن الحقائق المنطقية مجرد عبارات يُمكن الحصول عليها عن طريق الإنابة في صورة منطقية صحيحة. إنها لا تعالج أي مواضيع مميزة كل المواضيع بلا تمييز.

لمحة تاريخية: يرجع اختزال الأعداد المعقولة إلى نظرية المجموعات إلى بيانو، ويعود اختزال الأعداد غير المعقولة بالأساس إلى ديدكيند (1872). وقد أصبح التنفيذ المفصل للبرنامج الكامل للاختزال ناجعًا مع العمل المأثور لوايتهيد وراسل في كتابهما **مبادئ الرياضيات** (1910-1913)، باستثناء مساهمة فينر (1914) الذي ردَّ بدوره العلاقات إلى الفئات. (انظر اللمحة التاريخية السابقة).

اكتشف راسل مفارقته (Paradox) سنة 1901. وعرض سنة 1908 نظريته الشهيرة عن الأنماط، وهي علامة تجارية لنظرية المجموعات حظيت بتأييد كبير طيلة خمسين عاما لكنها تتطلب عرضًا مفرطًا للأغراض الحالية. يعود نسق زيرميلو كذلك إلى عام 1908، وأما نسق فون نويمان فيعود إلى 1925. للاطلاع على عرض ومقارنة أكثر اكتمالًا لهذه الأنساق ولغيرها، راجع كتابي: **نظرية المجموعات ومنطقها**. ⎿

حلول جزئية للتمارين

الفصل 1

تمرين 2:

الثلاثة الأولى.

تمرين 4:

نعم، عندما تكون «ب» وجـ» معًا كاذبتين.

الفصل 2

تمرين 1:

ينتج الروتين المشار إليه:

¬(ب ∧ جـ ∧ د) ∧ ¬(¬ب ∧ ¬جـ ∧ د) ∧ ¬(¬ب ∧ جـ ∧ ¬د) ∧
¬(ب ∧ ¬جـ ∧ ¬د) ∧ ¬(¬ب ∧ ¬جـ ∧ ¬د).

لكن هذا يكافئ:

¬(ب ∧ جـ ∧ د) ∧ ¬(¬ب ∧ ¬جـ) ∧ ¬(¬جـ ∧ ¬د) ∧ ¬(¬ب ∧ ¬د)

الفصل 3

تمرين 2:

¬(ب ∨ جـ) ∨ ¬(¬ب ∨ ¬جـ).

الفصل 4

تمرين 1:

سيعزف جونز أو سيغني وستغني ماري.

سيعزف جونز أو سيغني جونز وماري.

تمرين 3:

الجزء الثاني:

¬(ب ∨ ج) .∧ ص ∨ ض .← ¬(ب ∨ ج) ∧ ض

تمرين 5:

الجزء الأخير:

ECpKAqrApKqsCAKNqNrKNpANqNsNp.

الفصل 5

تمرين 2:

ك ∧ ك ∨ ص .← ص ∧ ك

ص ← ك

ك

تمرين 3:

الجزء الثالث:

ب ←. ب ← جـ

ص ←. ص ← جـ	ك ←. ك ← جـ
ص ← جـ	ص
جـ	
ص ك	

الفصل 6

تمرين 1:

الجزء الثاني:

ب ↔ جـ .V. ب ↔ ¬جـ

ص ↔ جـ .V. ص ↔ ¬جـ	ك ↔ جـ .V. ك ↔ ¬جـ
جـ V ¬جـ	¬جـ V جـ
ص	ص

تمرين 2:

الجزء الأول:

ب V جـ .← جـ :V: جـ ←. ب Vجـ

تمرين 4:

(أ) لا. (ب) نعم، إن نفي «ب V جـ» متسق.

(ج) نعم، إن نفي «ب V ¬جـ» غير متسق.

الفصل 7

تمرين 1:

ب ↔. جـ ↔ د :←: د ↔. جـ ← ب

ص ↔. جـ ↔ د :←: د ↔. جـ ← ص

جـ ↔ د .← د

جـ ↔ ص .← ص	جـ ↔ ك .← ك
ص	جـ

وعليه «ب ↔. جـ ↔ د» لا تستلزم

ص ك «د ↔. جـ ← ب»

د ↔. جـ ← ب :←: ب ↔. جـ ← د

د ↔. جـ ← ص :←: ص ↔. جـ ← د

د ←. جـ ↔ د.

ص ←. جـ ↔ ص

جـ

ص ك وعليه فالعكس ليس صحيحًا.

تمرين 4:

يبرهن فحصان انتقائيان لا «ب V جـ .← د» ولا «ب ←. جـ V د» تستلزم «ب ← جـ».

ب ← جـ ب V جـ.← د ب ←. جـ V د

ص ك ص V ك .← د ص ←. ك V د

ك ك

يبين التحليل الصدقي أن العبارة «ب ← جـ. ←: ب V جـ ← د» ليست صحيحة. وعليه فإن «ب ← جـ» لا تستلزم «ب V جـ ← د». في حين ستستلزمها، بواسطة (2)، إذا استلزمتها «ب ←. جـ V د»، نظرًا لأن «ب ← جـ» تستلزم «ب ←. جـ V د»؛ وبذلك فإن «ب ←. جـ V د» لا تستلزم «ب V جـ ← د» أيضًا.

تمرين 7:

جواب جزئي:

إن الصيغ هي: «ب ↔ جـ ٨ د» و«جـ ← د ٨ ب .٨ ¬جـ ← ¬د ٨ ¬ب».

الفصل 8

تمرين 3:

تمتد جملة «فإن» إلى «باربودا»، حيث يجب أن تحكم «س» فعل

«أسافر». وبذلك فالعبارة شرطية:

إما أن يفوز العمالقة أو برانز ويحتل جاكالز المركز الثاني ← سأعوض الخسارات الماضية أو أشتري بيانو أو سأسافر إلى باربودا.

إن مقدم هذا الشرط وصل وليس فصلًا، حيث يتم تنسيق «العمالقة» و«برانز» بواسطة الفعل المشترك «يفوز».

يفوز العمالقة أو برانز .∧ يحتل جاكالز المركز الثاني .← سأعوض الخسارات الماضية وإما أشتري بيانو أو سأسافر إلى باربودا.

والتالي وصل كذلك، نظرًا لأن «إما» يقع بعد «و» بالأحرى قبل «س».

النتيجة النهائية:

لـ «سأكون»:

يفوز العمالقة ∨ برانز.∧ يحتل جاكالز المركز الثاني .← سأعوض الخسارات الماضية .∧ سأشتري بيانو ∨ سأسافر إلى باربودا.

الفصل 9

تمرين 1:

«ب ← د .∧ جـ ← د» تُكافِئ «ب ∨ جـ ← د»، والثلاثة الأخرى تُكافِئ «ب ∧ جـ ← د». غير أن القارئ مطالب بإنجاز التحليل الصدقي.

الفصل 10

تمرين 1:

الصيغة الأولى:

ب.∧ جـ ∨ ¬[د ∨ ¬ (جـ ∨ ب)]،

¬ب :∧ جـ ∨. ¬د .∧ جـ ∨ ب،

¬ب ∧ جـ ∨ ¬ب ∧ ¬د ∧ جـ ∨ ¬ب ∧ ¬د ∧ ب.

يلزم عن ذلك «ــب ٨ جـ V ــب ٨ ــد ٨ جـ» ، كما يلزم عنه حقًا «ــب ٨ جـ». لمعرفة ميزة العمل من الخارج نحو الداخل، حاول القيام بهذا التمرين بالطريقة المعاكسة، قم أوّلًا بتغيير الجزء الداخلي «ــ(جـ V ب)» إلى «ــجـ ٨ ــب» ثم قم بالعمل نحو الخارج.

تمرين 1:

النصف الأخير:

ينتهي الأمر بالصيغ الثلاث الأخيرة من الصيغ الست، بعد تبسيط واضح، كالآتي:

ب ٨ جـ ٨ د V ــب ٨ ــجـ ٨ ــد،

ب ٨ جـ ٨ د V ــب ٨ ــجـ ٨ د V ب ٨ ــجـ ٨ ــد V ــب ٨ جـ ٨ ــد،

ب ٨ جـ ٨ د V ــب ٨ ــد V ــجـ ٨ ــد.

غير أن القارئ مطالب بإنجاز جميع الخطوات.

تمرين 2:

النصف الأخير:

اثنان من هذه الثلاثة الأخيرة تم تطويرهما بالفعل، كما رأينا أعلاه. تصبح الأخيرة:

ب ٨ جـ ٨ د V ــب ٨ جـ ٨ ــد V ــب ٨ ــجـ ٨ ــد V ب ٨ ــجـ ٨ ــد

مع حذف الجملة المكررة.

تمرين 3:

نعم. يجب على القارئ أن يعلِّل ذلك.

تمرين 4:

الجزء الأخير (المقابل للتمرين 4 من الفصل 7).

تتحول الصيغ الثلاثة إلى الصور القانونية الفصلية كالآتي:

ــب V جـ   ــب ٨ ــجـ V د،   ــب V جـ V د.

وعندما يتم تطويرها، تصبح في النهاية على التوالي:

¬ب ∧ جـ ∧ د ∨ ¬ب ∧ ¬جـ ∧ د ∨ ¬ب ∧ جـ ∧ ¬د ∨ ¬ب ∧ ¬جـ
∧ ¬د ∨ ب ∧ جـ ∧ د ∨ ب ∧ جـ ∧ ¬د،

¬ب ∧ ¬جـ ∧ د ∨ ¬ب ∧ ¬جـ ∧ ¬د ∨ ب ∧ جـ ∧ د ∨ ¬ب ∧ جـ ∧
د ∨ ب ∧ ¬جـ ∧ د،

¬ب ∧ جـ ∧ د ∨ ¬ب ∧ جـ ∧ ¬د ∨ ¬ب ∧ ¬جـ ∧ د ∨ ¬ب ∧ ¬جـ
∧ ¬د ∨ ب ∧ جـ ∧ د ∨ ب ∧ جـ ∧ ¬د.

بعد إعادة ترتيبها للمطابقة، تظهر على النحو التالي:

ب ∧ جـ ∧ د ∨ ¬ب ∧ جـ ∧ د ∨   ¬ب ∧ ¬جـ ∧ د ∨
ب ∧ جـ ∧ ¬د ∨ ¬ب ∧ جـ ∧ ¬د ∨ ¬ب ∧ ¬جـ ∧ ¬د،

ب ∧ جـ ∧ د ∨ ¬ب ∧ جـ ∧ د ∨ ب ∧ ¬جـ ∧ د ∨ ¬ب ∧ ¬جـ ∧ د
∨   ¬ب ∧ ¬جـ ∧ ¬د،

ب ∧ جـ ∧ د ∨ ¬ب ∧ جـ ∧ د ∨ ب ∧ ¬جـ ∧ د ∨ ¬ب ∧ ¬جـ ∧ د ∨
ب ∧ جـ ∧ ¬د ∨ ¬ب ∧ جـ ∧ ¬د ∨ ¬ب ∧ ¬جـ ∧ ¬د.

ثم يُظهر التضمن أن الصيغة الثالثة تلزم عن الأولى والثانية، وأنه لا يوجد لزوم آخر. من الواضح أن الطريقة سيئة.

الفصل 11

تمرين 3:

الجزء الأول:

نرى من خلال الفحص الانتقائي أن «جـ ∧ د» تستلزم بقية الفصل وبالتالي فهي نافلة. فإذا حذفناها نحصل على: «ب ∧ ¬جـ ∧ ¬د ∨ ¬ب ∧ جـ ∨ ب ∧ د». من خلال فحص انتقائي آخر، نرى أن هذا كله يلزم عن «ب ∧ ¬جـ»، ومن ثم فإن «¬د» لاتزال نافلة.

تمرين 6:

النصف الأخير:

لا ينتج عن الصيغ الثلاث الأخيرة في التمرين 1 من الفصل العاشر أي إجماع، حيث لا يوجد تعارض بين جملتين في حرف واحد بالضبط. لذلك لا توجد مستلزمات أولية أخرى.

تمرين 7:

النصف الأخير:

لا تحوز هذه الصيغ الثلاث على مكافئات قانونية فصلية أوجز، نظرًا لأن جميع المستلزمات الأساسية موجودة ولا يوجد أي منها نافل.

الفصل 12

تمرين 1:

الأول مقابل لكل من الثلاثة الآخرين. هؤلاء الثلاثة متُكافِئون. لأن «ب ↔ جـ»، وَفقًا لقانون التقابل الثاني، تقابل «¬¬(¬ب ↔ ¬جـ)».

تمرين 3:

الجزء الجملي

تعتبر الجملة نافلة إذا برهن الفحص الانتقائي أنها تلزم عن بقية الصيغة.

تمرين 4:

الصيغة الأولى:

¬ب .∧ جـ ∨ ¬[د ∨ ¬(جـ ∨ ب)]،

¬ب :∧ جـ ∨. ¬د .∧ جـ ∨ ب،

¬ب .∧ جـ ∨. ¬د .∧ جـ ∨ جـ ∨ ب.

لنختزل،

¬ب .∧ جـ ∨ ¬د .∧ جـ ∨ ب

¬ب .∧ جـ ∨ ¬د .∧ جـ

¬ب ∧ جـ

الفصل 13

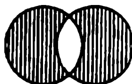
تمرين 1:

بواسطة (1)، [3 ←:. 2 ←:] ∧ ¬ب ← ب .←. ¬ب ← جـ

الفصل 15

تمرين 2:

نعم. قد لا يوجد أي ك (ومِن ثَمَّ لا ل).

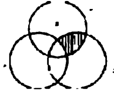


الفصل 17:

تمرين 1:

الاستدلال الثاني:

اكتب «ك» و«ل» و«م» بالنسبة إلى «يعرف جورج» و«يعرف مابيل» و«معجب بمابيل»



تمرين 3:

الجزء الثاني:

اقتراح: قم بتوسيع أداة الشريط في الرسم الهندسي 11.

الفصل 18

تمرين 1:

المثال الأول:

ـVـك ٨ ل ٨ ـم، ـVـك ٨ ـم ٨ ـل، ∴ ـVـك ٨ ـم.

تمرين 1:

المثال الأخير:

ـVـ ـ(ل V م)، ـVـك ٨ ل، ∴ ـVـك ٨ ـم

تمرين 2:

لا تستلزمها. (لا يزال يتعين على القارئ أن يشرح، أو يتابع القراءة إذا كان محتارًا).

الفصل 19

تمرين 2:

ترمز «ك» إلى «يدرس المنطق»، «ل» إلى «يدرس اللاتينية»، وهكذا دواليك.

Vك ٨ ل ٨ ⌐م ٨ ⌐ن .٨ ⌐V [(ل V ع) ٨ ⌐(ك ٨ ن)].

وندخل علها النفي:

⌐(ك ٨ ل ٨ ⌐م ٨ ⌐ن .٨ ⌐V[(ل V ع) ٨ ⌐ (ك ٨ ن)].

نحولها إلى الصورة القانونية الوصلية:

⌐(ك ٨ ل ٨ ⌐م ٨ ⌐ن .V V[(ل V ع) ٨ ⌐ (ك ٨ ن)].

ونحوّلها إلى شرط وجودي:

Vك ٨ ل ٨ ⌐م ٨ ⌐ن ← V [(ل V ع) ٨ ⌐(ك ٨ ن)].

لنجر الفحص الانتقائي لاختبار إن كانت «ك ٨ ل ٨ ⌐م ٨ ⌐ن» تستلزم «(ل V ع) ٨ ⌐(ك ٨ ن)»:

(ل V ع) ٨ ⌐(ك ٨ ن)

(ص V ع) ٨ ⌐(ك ٨ ص)

ص

وعليه فإن النفي صحيح. ومن ثَمّ فإن العبارة الأصلية غير متسقة.

تمرين 3

الجزء الأول:

⌐Vك ٨ ل ٨ ⌐م .٨ ⌐Vك ٨ ⌐م ٨ ⌐ل .← ⌐Vك ٨ ⌐م.

الصيغة القانونية الوصلية:

Vك ٨ ل ٨ ⌐م V ⌐Vك ٨ ⌐م ٨ ⌐ل V ⌐Vك ٨ ⌐م.

الشرط الوجودي:

Vك ٨ ⌐م ← V(ك ٨ ل ٨ ⌐م V ك ٨ ⌐م ٨ ⌐ل).

صحيحة لأن الفحص الانتقائي يبين أن «ك ٨ ⌐م» تستلزم «ك ٨ ل ٨ ⌐م V ك ٨ ⌐م ٨ ⌐ل».

الفصل 20

تمرين 1:

الصيفة الثانية:

∧ = (ك ∨ ¬ل) ∧ ¬ل ∨ ¬ (ك ∨ ¬ل) ∧ل .←. ∧ = ك ∧ ¬ل ∨ ¬ك ∧ ل،

¬∨[(ك ∨ ¬ل) ∧ ¬ل ∨ ¬ (ك ∨ ¬ل) ∧ل] ← ¬ ∨(ك ∧ ¬ل ∨ ¬ك ∧ ل)،

∨[(ك ∧ ¬ل ∨ ¬ك ∧ ل) ← ∨ [(ك ∨ ¬ل) ∧¬ل] ∨ ¬(ك ∨ ¬ل) ∧ ل].

تحقق بواسطة التحليل الصدقي أن «ك ∧ ¬ل ∨ ¬ك ∧ ل» تستلزم: (ك ∨ ¬ل) ∧¬ل ∨ ¬(ك ∨ ¬ل) ∧ ل.

الفصل 22

تمرين 1:

المثال الأول:

∧سـ (سـ عضو في الفريق ← ¬ يستطيع جون أن ينتصر على سـ).

تمرين 2

المثال الأول:

∧سـ (سـ في شرق الرصيف ←. سـ متشرد ∨ سـ فقير)،

¬∧سـ (سـ في شرق الرصيف ← سـ فقير)،

∴ ∨سـ (سـ متشرد .∧ ¬ سـ فقير).

تمرين 3:

حل جزئي:

الاثنان في الوسط غير متُكافِئين.

الفصل 23

تمرين 2:

حل جزئي:

«∧سـ (ب ↔ ك(سـ))» و«ب ↔ ∧سـ ك(سـ)» حل على التوالي لـ «∧ سـ ¬ك(سـ)» و«¬∧سـ ك(سـ)» عندما نضع «ك» مكان «ب»، وعليه فإنهما غير متكافِئتين.

تمرين 3:

يلزم عن الأول كل واحد وكل واحد يستلزم الأخير. على القارئ أن يبيِّن ذلك.

الفصل 24

تمرين 1:

إذا وسعنا «↔» وغيّرنا الأحرف نحصل على:

∧سـ ك(سـ) ←. ∧عـ ل(ع) ← ∧هـ م(هـ) .∧ ∧غـ م(غ) ← ∧فـ ل(ف).

والآن نحن أحرار في اختيار ترتيب تصدير الأسوار. تكون إحدى النتائج النهائية:

Vسـ Vعـ Vغـ ∧هـ ∧فـ (ك(سـ) ←. ل(ع) ← م(هـ) .∧ م(غ) ← ل(ف)).

لاحظ أيضًا التحسين التالي. قد ننتقل إلى المرحلة المتوسطة:

∧سـ [ك(سـ) ←. ∧هـ (∧عـ ل(ع) ← م(هـ)) .∧ ∧فـ (∧غـ (م(غ) ← ل(ف))].

ثم إعادة تغيير الأحرف على النحو التالي:

Vسـ [ك(سـ) ←. ∧هـ (∧عـ ل(ع) ← م(هـ)) .∧ ∧هـ (∧غـ (م(غ) ← ل(هـ))]

بهدف استغلال قانون التوزيع (10) من الفصل 22. نحصل على:

Vس [ك(س) ← Λهـ (Λع ل(ع) ← م(هـ) .Λ Λغ (م(غ) ← ل(هـ))].

وهكذا يكون للنتيجة النهائية أربعة أسوار فقط.

Vس ΛهـVع Λغ (ك(س) ←. ل(ع) ← م(هـ) .Λ م(غ) ← ل(هـ)).

تمرين 3:

Vس Λع (ك(س) V ل(ع) V م(ع) .Λ ¬ك(س) V ¬ ل(ع) V م(ع))،

Vس [Vع (ك(س) V ل(ع) V م(ع)) .Λ Λع (¬ك(س) V ¬ ل(ع) V م(ع))]،

Vس [Vع ك(س) V Λع (ل(ع) V م(ع)) .Λ ¬ك(س) V Λع (¬ ل(ع) V م(ع))]،

Vس [ك(س) V Λع (¬ل(ع) V م(ع)) .V. ¬ك(س) .Λ Λع (ل(ع) V م(ع))

.V. Λع (ل(ع) V م(ع)) .Λ Λع (¬ل(ع) V م(ع))]،

Vس [ك(س) .Λ Λع (¬ل(ع) V م(ع)) .V. ¬ك(س) .Λ Λع (ل(ع) V م(ع))]

.V. Λع (ل(ع) V م(ع)) .Λ Λع (¬ل(ع) V م(ع))،

Vس [ك(س) .Λ Λع (¬ل(ع) V م(ع))] .V. Vس [¬ك(س) .Λ Λع (ل(ع) V م(ع))]

.V. Λع (ل(ع) V م(ع)) .Λ Λع (¬ل(ع) V م(ع))،

Vس ك(س) .Λ Λع (¬ل(ع) V م(ع)) .V. Vس ¬ك(س) .Λ Λع (ل(ع) V م(ع))

.V. Λع (ل(ع) V م(ع)) .Λ Λع (¬ل(ع) V م(ع)).

الفصل 25

تمرين 4:

اقتراح: عبّر رمزيًا عن النتيجة كما يلي:

Vسـ (ك(سـ) .Λ ل(سـ)) ← Vسـ (م(سـ) .Λ ن(سـ)).

الفصل 26

تمرين 2:

{هـ: عـ= هـ+ هـ}

الفصل 27

تمرين 4:

Λسـ [كان سـ أحد أصابعها ← Vعـ (كانت عـ خاتمًا .Λ وكان عـ على سـ)].

تمرين 5:

المثال الأخير:

اقتراح: عبِّر لفظيًا في مرحلة أولى عن التسوير الداخلي مع الاحتفاظ بـ «سـ».

تمرين 6:

المثال الأخير:

كاذب. إذا كانت سـ وهـ كما تم وصفها، فإذا اعتبرنا عـ هي هـ يُمكن أن نستنتج أن سـ كانت بين هـ وهـ

تمرين 7:

المثال الأول:

ـ V سـ ـV عـ (سـ = عـ)»، أو على نحو متُكافِئ «Λسـ ـΛعـ ـ(سـ = عـ)»، أو، بطريقة مكافئة، «Λسـ Vعـ (سـ= عـ)». صادقة.

الفصل 28

تمرين 1:

العمود الأيمن:

يمكن إنابة الأولين؛ وليس الثالث. تعني نتائج الإنابتين الأوليين أن عـ مدح نفسه لشخص ما وأن عـ مدح شخصًا ما في وجهه.

تمرين 2:

إجابة جزئية:

وحدها الصيغة المحمولية الثالثة يُمكن إنابتها في «Λسـ ك(سـ) ← ك(ع)». أو في «ك(ع) ← Vسـ ك(سـ)»: فقط الثالث والرابع في (4)؛ لا واحد في (13) أو(14).

تمرين 3:

إجابة جزئية:

وهكذا يُمكن الحصول على أربعة من الثمانية بهذه الطريقة. الثانية على اليمين والثلاثة على اليسار لا يُمكنها ذلك. على الرغم من أنه يُمكن استنتاج اثنتين منها خلال خطوة أو خطوتين إضافيتين.

الفصل 29

تمرين 1:

الجزء الثالث:

المراحل بين (8) و(9):

Λهـ (ك(هـ) ← ل(هـ)) ← Λعـ [Vسـ(ك(سـ) .Λ م(عـ، سـ)) ← Vفـ (ل(فـ) .Λ م(عـ، فـ)]،

Λعـ [Λهـ (ك(هـ) ← ل(هـ)) ←.Vسـ (ك(سـ) .Λ م(عـ، سـ)) ← Vفـ (ل(فـ) .Λ م(عـ، فـ))] .

Λع (Λهـ (ك(هـ) ← ل(هـ))←. Λسـ [ك(سـ) .Λ م(عـ سـ). ← Vفـ
ل(فـ) .Λ م(عـ فـ))]]،

Λع Λسـ [Λهـ (ك(هـ) ← ل(هـ) ←: ك(سـ) .Λ م(عـ سـ). ← Vفـ (ل(فـ)
.Λ م(عـ فـ))]،

Λع Λسـ Vهـ [ك(هـ) ← ل(هـ) .←: ك(سـ) .Λ م(عـ سـ). ← Vفـ (ل(فـ)
.Λ م(عـ فـ))]،

Λع Λسـ Vهـ [ك(هـ) ← ل(هـ) .← Vفـ (ك(سـ) .Λ م(عـ هـ) . ←. ل(فـ)
.Λ م(عـ فـ))]،

Λع Λسـ Vهـ Vفـ (ك(هـ) ← ل(هـ) .←: ك(سـ) .Λ م(عـ سـ) . ←. ل(فـ)
.Λ م(عـ فـ))]،

تمرين 7:

Λسـ Λع Λهـ (ك(سـ، ع) .Λ ك(عـ هـ) . ←ك(سـ هـ)) .Λ Λسـ ⌐
ك(سـ سـ)

. ← Λسـ Λع (ك(سـ ع) ← ⌐ك(عـ سـ))،

Λسـ Λع Λهـ (ك(سـ، ع) .Λ ك(عـ هـ) . ←ك(سـ هـ)). Λ Λفـ ⌐ك(فـ، فـ)

.← Λظ Λغ (ك(ظـ غـ) . ← ⌐ك(غـ ظـ))،

Λظ Λغ Λسـ Λع Λهـ Λفـ (ك(سـ ع) .Λ ك(عـ هـ). ←ك(سـ، هـ): Λ
⌐ك(فـ فـ) :←. ك(ظـ غـ) . ← ⌐ك(غـ ظـ))،

Λسـ Λع Λهـ Λفـ (ك(سـ ع) .Λ ك(عـ هـ) . ←ك(سـ هـ) :Λ ⌐ ك(فـ
فـ) :←. ك(ظـ غـ) . ← ⌐ك(غـ ظـ))،

ك(ظـ غـ).Λ ك(غـ ظـ) .← ك(ظـ ظـ) :Λ ⌐ ك(ظـ ظـ) :←. ك(ظـ
غـ) ← ك(غـ ظـ).

الفصل 30

تمرين 1:

إن متغير التعيين في «ك(ع، ع)» و«¬ك(هـ، ع)» ليس جديدًا.

«¬ Vس ك(س، س)» ليست في صيغة شاملة، غير أنه يكفي أن نضعها في صيغة شاملة لكي يتم الاستدلال عليها، مع «Λس¬ك(س، س)» و«Λع ك(ع، ع)» كمقدمتين والتعيينات السابقة نفسها.

تمرين 2:

الجزء الأول:

انظر بداية الفصل 38.

الفصل 31

تمرين :

مع حذف بعض الخطوات

Λس Λع [ك(س) .Λ ل(س، ع). ← Vهـ (ن(هـ، ع) .Λ م(س، هـ))]،

Λس (ك(س) .Λ Vع ل(س، ع) . ← Vع م(س، ع).

مقدمات شاملة من أجل عدم الاتساق:

Λس Λع Vهـ (ك(س) .Λ ل(س، ع) .←. ن(هـ، ع) .Λ م(س، هـ)).

Vس Vع Λهـ ¬ (ك(س) .Λ ل(س، ع) .← م(س، هـ)).

تعيينات:

Λهـ ¬ (ك(ظ) .Λ ل(ظ، غ) .← م(ظ، هـ)) (خطوة مزدوجة)

Vهـ(ك(ظ) .Λ ل(ظ، غ) .← ن(هـ، غ) .Λ م(ظ، هـ)) (خطوة مزدوجة)

ك(ظ) .Λ ل(ظ، غ) .←. ن(ف، غ) .Λ م(ظ، ف)

¬ (ك(ظ) .Λ ل(ظ، غ) .← م(ظ، ف)).

تمرين 4:

بالنسبة لنتائج التشارح، انظر الإجابات في الفصل 35.

تمرين 5:

مقدمات:

Λسـ (سـ يسخر من سـ ← أحِب سـ).

Λسـ [Λعـ (عـ صديق سـ ← سـ يسخر من عـ) ← أكره سـ]

أرضية

Λسـ (أكره سـ ← ¬ أحب سـ)

النتيجة:

Vسـ Λعـ (عـ صديق سـ ← سـ يسخر من عـ) ← Vسـ ¬سـ صديقًا لـ سـ

مقدمات شاملة من أجل عدم الاتساق:

Λسـ (ل(سـ سـ) ← ش(سـ)).

Λسـ Vعـ ل(عـ سـ) ← ل(سـ عـ). ← ج(سـ)).

Λسـ (ج(سـ) ← ¬ش(سـ)).

Vسـ Λعـ Λهـ ¬ (ك(عـ سـ) ← ل(سـ عـ) .← ¬ك(هـ هـ)).

تعيينات:

ΛعـΛهـ ¬ (ك(عـ فـ) ← ل(فـ عـ) .← ¬ك(هـ هـ))

Λعـ (ك(عـ فـ) ← ل(فـ عـ) .← ج(فـ))

ك(ظـ فـ) ← ل(فـ غـ) .← ج(فـ)

ل(فـ فـ) ← ش(فـ)

ج(فـ)← ¬ ش(فـ)

¬(ك(ظـ فـ) ← ل(فـ غـ) .← ¬ك(فـ فـ)) (خطوة مزدوجة)

¬(¬ك(فـ فـ) ← ل(فـ فـ) .← ¬ك(فـ فـ)) (خطوة مزدوجة)

الفصل 32

تمرين 2:

الأعداد الفردية ص والزوجية ك.

الفصل 34

تمرين 1:

يتعذر أن نتوفر هنا على طريقة للنقض التام، لأن عمليات نقض المنفيات توفِّر أدلة؛ ويتعذر أن نجد طريقة للبت تسمح بتسرب فقط بعدد متناهٍ من الحقائق، لأن هذه الطريقة في البتّ متى اقترنت بلائحة من الحقائق المهملة ستزودنا بطريقة بت تامة.

تمرين 2:

لأنه بخلاف هذا تستطيع أن تبرهن دائمًا على أن صيغة صحيحة بخصوص التناهي عن طريق البرهنة على كون نفيها كان في تا.

الفصل35

تمرين 1:

قم بإنابات مماثلة لتلك التي تم القيام بها في البرهنة الأولى من هذا الفصل، باستثناء استعمال «ط$_{ط ع ط}$» في (5).

تمرين 2:

تناول من جديد الـتمرين 4 في الفصل 31 وفق طريقة دربن:

مقدمات:

Vس (ك(س) .∧ Λع [ل(ع) .∧ Vهـ (ك(هـ) .∧ م(ع، هـ)) .← م(ع، س)])

Λع [ل(ع) .∧ Vهـ (ك(هـ) .∧ م(ع، هـ)]

~ ∨س [ك(س) .∧ ∧ع (ل(ع) ← م(ع، س))]   (نتيجة منفية)

تعديلات:

∨س (ك(س) .∧ ∧ع [~ل(ع) ∨ ∧هـ ~ (ك(هـ) .∧ م(ع، هـ)) ∨ م(ع، س)])

∧ع [~ل(ع) ∨ ∨هـ ~(ك(هـ) .∧ م(ع، هـ))]

∧س [~ك(س) ∨ ∨ع ~(ل(ع) ← م(ع، س))]

صيغ قانونية دالِّية:

ك(س) .∧ ∧ع [~ل(ع) ∨ ∧هـ ~ (ك(هـ) .∧ م(ع، هـ)) ∨ م(ع، س)]

∧ع (~ل(ع) .∨ ك($هـ_ع$) .∧ م(ع، $هـ_ع$))

∧ع [~ك(س) ∨ ~(ل($ع_س$) ← م($ع_س$، س))].

تعيينات:

ك(س) .∧ ~(ل($ع_س$) ∨ ~(ك($هـ_{ع_س}$) .∧ م($ع_س$، $هـ_{ع_س}$)) ∨ م($ع_س$، س)

~(ل($ع_س$) .∨ ك($هـ_{ع_س}$) .∧ م($ع_س$، $هـ_{ع_س}$)

ك(س) ∨ ~(ل($ع_س$) ← م($ع_س$، س))

الفصل 36

تمرين 2:

البرهنة على (4) في الفصل 29:

ك(س، ص) ← ك(س، ع) .∨. ك(ص، ع) ← ك(ع، ع)

∨هـ (ك(ص، هـ) ← ك(هـ، ع)) ∨ ∨هـ (ك(س، هـ) ← ك(هـ، ع))

∨هـ (ك(ص، هـ) ← ك(هـ، ع))

الفصل 37

تمرين 2:

البرهنة على (1) في الفصل 29 بواسطة الطريقة الأخيرة في الفصل 37:

[1] ك(ع). ∧ ∧سـ (ك(سـ) ← ل(سـ ع)) ←. ك(ع) .∧ ل(عـ ع) [∧ ع 1 ←.] ∨عـ [ك(ع) .∧ ∧سـ (ك(سـ) ← ل(سـ ع))] ← ∨سـ (ك(سـ) .∧ ل(سـ سـ)).

أية صيغة واحدية صحيحة تغطي [1]؟

ك(ع) .∧ ∧سـ (ك(سـ) ← م(سـ)) .←. ك(سـ) .∧ م(ع).

البرهنة على (4) من الفصل 29:

[1] ∧هـ ك(سـ هـ) ← ك(سـ ع)

[1←] ∨هـ (ك(سـ هـ) ← ك(هـ ع))

إن الصيغة الواحدية الصحيحة التي تخفي هذا السطر الأخير هي كالتالي. تحقق من صحتها:

∧هـ ل(سـ) ← م(سـ) .← ∨هـ (ل(هـ) ← م(هـ)).

البرهنة على (8) في الفصل 29:

[1]∧سـ (ك(سـ) ← ل(سـ)) ←. ∨سـ (ك(سـ) .∧ م(عـ سـ)) ← ∨سـ (ل(سـ) .∧ م(عـ سـ)) [∧ع 1←.] ∧سـ (ك(سـ) ← ل(سـ)) ← ∧ع [∨سـ (ك(سـ) .∧ م(عـ سـ)) ← ∨سـ (ل(سـ) .∧ م(عـ سـ))]

البرهنة على (11) في الفصل 29:

[1] ∧هـ (ك(سـ هـ) ← ك(سـ هـ))

[1←] ∨ع ∧هـ (ك(سـ هـ) ← ك(ع، هـ)).

الفصل 38

تمرين 1:

تعتبر الأولى والثالثة على اليمين صحيحتين لكنهما غير مكتملتين. إن الثانية على اليمين غير صحيحة (تخرق القاعدة الأبجدية) وغير مكتملة؛ وأما تلك التي تقع في الأعلى على اليسار فصحيحة ومكتملة. والأخيرة مكتملة لكنها غير صحيحة، نظرًا لأن «ع» مؤشرة مرتين.

تمرين 2:

في جزء منه، راجع الأخير بإدخال سطر جديد «ك(هـ) ∧. ل(هـ)».

تمرين 3:

إعادة صياغة التمرين. 5 من الفصل 31 (انظر الجواب أعلاه):

*(1) ∧سـ (ل(سـ، هـ) ← ش(سـ))

**(2) ∧سـ [∧عـ (ك(عـ سـ) ← ل(سـ، عـ)) ← ج(سـ)]

***(3) ∧سـ (ج(سـ) ← ¬ش(سـ))

****(4) ∨سـ ∧عـ (ك(عـ، سـ) ← ل(سـ، عـ))

****(5) ∧عـ (ك(عـ، فـ) ← ل(فـ عـ)) (4) فـ

****(6) ل(فـ، فـ) ← ش(فـ) (1)

****(7) ∧عـ (ك(عـ، فـ) ← ل(فـ عـ)) ← ج(فـ) (2)

****(8) ج(فـ) ← ¬ش(فـ) (3)

****(9) ك(فـ، فـ) ← ل(فـ، فـ) (5)

****(10) ¬ك(فـ فـ) (9)(8)(7)(6)(5)

****(11) ∨سـ ¬ك(سـ سـ) (10)

*** (12) ∨سـ ∧عـ (ك(عـ سـ) ← ل(سـ، عـ)) ← ∨سـ ¬ك(سـ، سـ)

*(11)

الفصل 41

تمرين 1:

بواسطة طريقة الصيغ الوجودية الخالصة.

¬ (ك(ع) .∧ ك(هـ)) .∧ ك(هـ) ← ∧ سـ ك(سـ) . ← ¬ك(ف)،

Vسـ [¬(ك(ع) .∧ ك(هـ)) .∧ ك(ف) ← ك(سـ) .← ¬ ك(ف)]،

¬ (ك(ع) .∧ ك(هـ)) .∧ ك(ف) ← ك(ع) .← ¬ك(ف)

:V: ¬(ك(ع).∧ ك(هـ)) .∧ ك(ف) ← ك(هـ) . ← ¬ك(ف).

تمرين 2:

∧سـ (ك(عـ سـ) ← ل(عـ سـ)) .∧ ∧سـ (ل(سـ هـ) ← ¬ك(هـ، سـ)) .

← ¬ك(هـ ع)،

Vسـ Vف (ك(سـ، ع) ← ل(عـ سـ) .∧ ل(ف، هـ) ← ¬ك(هـ، ف). ←

¬ك(هـ ع))،

ك(هـ ع) ← ل(ع، هـ) .∧ ل(عـ هـ) ← ¬ ك(هـ ع) .← ¬ك(هـ، ع).

يُمكن اختصارهذا باستعمال (10) من الفصل 22.

الفصل 42

تمرين 1:

هب أن:

∧سـ (ك(سـ) ←: سـ = ع .V. سـ = هـ)، Vسـ (ك(سـ) .∧ ل(سـ))،

وهب أيضًا أن: «∧سـ∧ف (ل(سـ) .∧ سـ = ف. ← ل(ف))» مُسلَّمة للهُويّة.

لتبيان أن ل(ع) V ل(هـ). الطريقة الأساسية:

مقدمات:

∧سـ (ك(سـ) ←: سـ = ع .V. سـ = هـ)

Vسـ (ك(سـ) .∧ ل(سـ))

∧سـ∧فـ (ل(سـ) .∧ سـ = فـ . ← ل(فـ))

⌐ (ل(ع) ∨ ل(هـ))

تعيينات:

ك(ظ) .∧ ل(ظ)

ك(ظ) ← ظ = عـ .∨. ظ = هـ

ل(ظ) . ∧ ظ = عـ .← ل(ع)

ل(ظ) . ∧ ظ = هـ .← ل(هـ)

إن الأسطر الخمسة الأخيرة غير متسقة صدقيًا. ويمكن للقارئ أن يعيد التمرين متوسلًا بطريقة الصيغ الوجودية الخالصة.

تمرين 2:

يعتبر الشرط من اليمين إلى اليسار متغيرًا من (1)، وفق قاعدة من قواعد تحريك الأسوار؛ وأما الشرط من اليسار إلى اليمين، فإنه يثبت بواسطة ع.وعندما إن ندعمه بالحالة «عـ = عـ» من (2).

الفصل 43

تمرين 1:

(ا سـ)[سـ رجل من المدينة .∧ ∧عـ (عـ رجل من المدينة .∧ سـ ≠ عـ .← سـ أطول من ع)].

تمرين 2:

بواسطة طريقة الصور الوجودية الخالصة.

∧سـ (سـ كتب فا ↔. سـ = ع) .∧ عـ = عـ .∧ عـ كتب نا .← ∨سـ (سـ كتب فا .∧ سـ كتب نا))،

∨سـ ∨هـ (سـ كتب فا ↔. سـ = ع: ∧ عـ = عـ .∧ عـ كتب نا :←. هـ كتب فا .∧ هـ كتب نا)،

عـ كتب فا ↔. عـ = عـ :∧ عـ = عـ .∧ عـ كتب نا

:←. عـ كتب فا .∧ عـ كتب نا.

الفصل 44

م(ا سـ)(ك(سـ) .∧ ل(سـ)) .∧ ن(ا سـ)(ك(سـ) .∧ ل(سـ))،

Vعـ[م(عـ) .∧ ∧سـ(ك(سـ). ∧ ل(سـ) .↔. سـ = عـ)]

.∧ Vعـ[ن(عـ) .∧ ∧سـ(ك(سـ) .∧ ل(سـ) .↔. سـ = عـ)].

الفصل 47

تمرين 1:

النصف الأخير

تشمل ←(ك"ل) كل الأشياء، الإنسانية وغيرها، باستثناء الناس الذين كانوا أحياء سنة 1950. تتكون ←(←ك"ل) من الناس الذين ازدادوا قبل 1950 ونجوا في هذه السنة.

تمرين 2:

العلاقة الرابعة

علاقة سـ بـ عـ حيث سـ محبوب من قبل شخص ما (ذكر أو أنثى) والذي أخوه هو عـ

تمرين 3

النصف الثاني

هب أن ك علاقة إحسان، وم فئة الأرمينيين وي فئة اليتامى. وإذًا فإن ك"(م ي) تشمل فقط محسني اليتامى الأرمينيين بينما (ك"م) (ك"ي) تستغرق أيضًا كل الأشخاص الذين يحسنون سواء بالأرمينيين أو باليتيم.

قائمة الرموز المستعملة

الرمز المستعمل في الترجمة	الرمز المستعمل من طرف كواين	دلالتــه
ب، جـ، د، هـ ب$_1$، جـ$_1$، د$_1$، هـ$_1$	p, q, r,...	متغيرات قضوية (دالة على القضايا أو العبارات)
با، جا، ها	A, B, C, ...	متغيرات قضوية ماورائية
س، ع، ف... سَ، عَ، فَ...	x, y, z, w, ...	متغيرات دالة على الأشخاص ثوابت دالة على الأشخاص
ك، ل، م، ن،...	g, f ..	متغيرات محمولية (دالة على المحمولات أو الأوصاف)
¬	-	عامل النفي(ليس)، مقولة النفي (جميع أدوات النفي)
∧	.	رابط الوصل (أو العطف)
∨	∨	رابط الفصل (أو البدل)
←	←	رابط الشرط (إذا....فإن)
⊂	⊃	علاقة التضمن

المجموعة الفارغة	Λ	Λ
رابط التشارط (الشرط وعكسه)	↔	↔
التكافؤ (التلازم)	↔	↔
المساواة أو التماثل (الهُوِيّة)	y = x	سـ = ء
تساوي الفئات	=	=
أكبر أو تساوي	≤	≥
اللامساواة	≠	≠
علاقة اللزوم	←	←
الانتماء	∈	∋
تساوي بالتعريف	$=D_f$	= عر
علاقة التقاطع	∩	∩
علاقة الاتحاد	U	U
رمز الاقتباس	⌜⌝	⌜⌝
إذا وفقط إذا (متى)	iff	إفا
سور جزئي أو بعضي أو وجودي (يوجد على الأقل)	∃x	Vسـ

∧سـ	∀x	السور الكلي (كل)
(ا سـ)(ك(سـ))	(ιx)(Px)	وصف محدد
و! (ا سـ)(ك(سـ))	E !(ιx)(Px)	إضفاء صفة الوجود (عادة ما يستعمل المناطقة حرف يوطا اليوناني مقلوبًا)
∞	∞	رمز اللانهاية
سَ شَ....	a، b، ...	متغيرات الفئات
ص / ك	⊤/⊥	الصدق / الكذب
طا	p	طريقة البرهنة
$عا_{طا}$	s_p	عبارة من نظرية الأعداد الأولية
ت.ك	UI	تعيين كلي
ت.و	EI	تعيين وجودي
ع.ك	UG	تعميم كلي
ع.و	EG	تعميم وجودي
ق.ص.ا	TF	قاعدة الاستدلال الصدقي
شا	Cd	إشراط
مق	U	مجال القول

تاه	Sz	تالي عدد
عاه	Nz	هـ عدد
صا (ص أوك)	t	قيمة صدقية أيًا كانت
عا	S	عبارة أوصورة
سا	A	إسناد قيمي
تا	E	تعيين (تمثيل)
نع	Ref	انعكاس
حش	Pad	حشو
عس/ عاس	inv/ Inv	عكس / قلب
تر	Crln	ترابط
شه	similar	مشابه
سو(س)	Qx	سور أيًا كان

مسرد المصطلحات

المصطلح باللغة العربية	المقابل الإنجليزي
حد مطلق	Absolute term
مجرد (محمول)	Abstract
فصل (بدَل)	Alternation
فصل ضعيف (غير الاستبعادي)	Alternation nonexclusive
صور قانونية فصلية	Alternational normal schemata
مُقدَّم (الشرط)	Antecedent
تجميعي	Associative
منهج أكسيومي (تسليمي)	Axiomatic method
ذوو التوجه الأكسيومي	Axiomatists
مسلَّمات الهُويّة	Axioms of identity
تشارط	Biconditional
صور الحدود البولية	Boolean term schemata
متغير مقيد	Bound variable

Categorical	مقولي (محمولي)
Categorical statement	عبارة محمولية (مقولية)
Categorical syllogism	قياس محمولي (مقولي)
Cellular method	طريقة خلوية
Circular reasoning, or begging the question, or petitio principii	مصادرة على المطلوب، استدلال دائري
Clause	جملة
Closed sentence	عبارة محصورة
Coextensiveness	تساوي الماصدق
Coextensiveness functor	عامل تساوي الماصدق
Commutative	تبديلي
Complete	تام
Concrete	محسوس
Concretion	تشخيص، تشيء
Conditional	شرط
Conditional proof	برهان شرطي
Conditionalization (Cd)	إشراط (شا)
Consensus	اتفاق
Consequent	تالي (الشرط)

Consistency	اتساق
Consistent	متسق
constructive proof	برهان بنائي
Containment	احتواء (شمول، تضمن)
Contrafactual conditional	شرط لاواقعي (شرط ممتنع)
Copulas	رابطة
Correlation	علاقة ترابط
Cross-reference	تقاطع الإحالة
Decision procedure	طريقة البت
Deduction	استنباط
Denote	يدل على
Description	وصف
Descriptional premise	مقدمة وصفية
Designate	يعيّن
Development	تطوير
Dilemma	معضلة (إحراج)
Duality	تقابل
Duals	متقابلات

Dyadic term	حد اثنائي
E-instance	تعيين وجودي
Elementary Logic	منطق أولي
Elementary number theory	نظرية الأعداد الأولية
Enthymeme	قياس مضمر (أضمرت مقدمته الكبرى)
Epsilon	إبسيلون ∈
Equating	تساوي
Equipotent	متُكافِئ القوة
Equivalence	تكافؤ
Equivalent	مكافئ
Exclusive	استبعادي (فصل قوي)
Existential Quantifier	سور جزئي/ وجودي
Existential conditional	شرط وجودي
Existential generalization	تعميم وجودي
Existential instantiation- EI	تعيين وجودي
Extension	ماصدق
Extension of the term	ماصدق الحد
Fallacy of equivocation	مغالطة الالتباس (الاشتراك)

Fell swoop	فحص انتقائي
Figure of a syllogism	شكل القياس
Finite subclasses	فئات صغرى متناهية
Foundational systems	أنساق مُؤسِّسة
Free variable	متغير مطلق
Full sweep	فحص شامل
Functional normal form	صورة قانونية دالية
Functor	عامل
General term	حد عام (كلي)
General theory of validity	نظرية عامة في الصحة
Generalized conditional	شرط مُعمَّم
Grammar Logical	نحو منطقي
Identifying	تماثل
Inclusion	تضمن
Inconsistency	عدم الاتساق (تناقض)
Inconsistent	غير متسق (متناقض)
Indeterminacy	امتناع التحديد
Individual events	وقائع مفردة

Infinity schemata	صور اللاتناهي
Innocuous	حميد
Instance	تعيين (مثيل)
Instantial variable	متغير التعيين
Interchange	مبادلة
Interpretation	تأويل
Intersection	تقاطع
Law of distributivity of alternation through conjunction	قانون توزيع الفصل على الوصل
Law of distributivity of conjunction through alternation	قانون توزيع الوصل على الفصل
Law of infinite conjunction	قانون الوصل اللامتناهي
Lemma	قضية (مبرهنة) مساعدة
Lexicon	مفردات
Main method	طريقة أساسية
Major premise	مقدمة كبرى
Major term	حد أكبر
Material biconditional	تشارط مادي
Material conditional	شرط مادي

Mathematical induction	استقراء رياضي
Mathematical logic	منطق رياضي
Meaning	دلالة
Method of chains	طريقة السلاسل
Method of existential conditional	طريقة الشرط الوجودي
Middle term	حد أوسط
Minor premise	مقدمة صغرى
Minor term	حد أصغر
Modus ponens	قاعدة الوضع بالوضع
Monadic general term	حد عام واحدي
Monadic quantificational schemata	صورة تسويرية واحدية
Monadic term	حد واحدي
Mood of a syllogism	ضرب القياس
n-adic	ن-موقع
n-adically occurrence	مواقع نونية
n-adically occurrence	نونية المواقع
Natural deduction	استنباط طبيعي

Nonexclusive	غير استبعادي
Open sentence	عبارة مهملة
Paraphrase	تشارح
Postfoundational systems	أنساق ما بعد مؤسِّسة
Predicate	محمول
Predication	حمل
Premise	مقدمة
Prenex (ity) form	صيغة شاملة
Prime implicant	مستلزم أولي
Proof	برهان (دليل)
Proper inclusion	تضمن خاص
Pure existential	سور وجودي خالص
Pure form	صيغة خالصة
Pure universal	سور كلي خالص
quod erat demonstradum (Q.E.D)	المطلوب إثباته
Quantification	تسوير
Quantifier	سور (مكمِّم)
Recessive	أخمس

Reduction ad absurdum	رد إلى المحال، العبث، الخُلف (برهان)
Reflection	انعكاس
Reflexivity	انعكاسية
Relative clause	جملة موصولة
Relative term	حد نسبي
Resolution	بت بالتحليل الصدقي
Rules of passage	قواعد تحرك (الأسوار، النفي)
Rules of resolution	قواعد البت
Schemata	صور
Scope	مدى
Sentido da nova lógica O	معنى المنطق الجديد
Simple conversion	عكس مستوي كامل
Singular statement	عبارة شخصية
Singular term	حد شخصي
Stacked quantifiers	أسوارمتراكبة
Subject of the statement	موضوع العبارة (الحملية)
Subjunction	إلحاق
Substitution	إنابة

Superstitutions	إنابات فوقية
Syllogism	قياس (حملي)
Symmetry	تناظر
Synonymous	ترادف
Term abstraction	تجريد الحد
Tetradic	رباعي
Theorem of deduction	مبرهنة الاستنباط
Transitivity	تعدّي (خاصية)
Tri- or n-chotomy	(منطق) ثلاثي القيم أو نوني القيم
Triadic	ثلاثي
Truth function	دالة صدقية
Truth functional inference	استدلال صدقي
Truth tables	جداول الصدق
Truth value	قيمة الصدق
Truth-functional schemata	صور صدقية
Truth-value analysis	تحليل صدقي
Union	اتحاد
Universal generalization	تعميم كلي

مسرد المصطلحات

Universal instantiation—UI	تعيين كلي
Universal quantification	تسوير كلي
Universal quantifier	سور كلي
Universe of discourse	مجال القول
valid	صحيح

طرائق المنطق لويلارد كواين وما زال الكتابَ المدرسيّ الأساسيّ لطُلّاب المنطق، خصوصًا أنه لا يفترض أيَّ معرفةٍ
لقيّة مُسبقة. إنّه مُوجّه بالدرجة الأولى إلى طلبة المنطق والرياضيات والفلسفة. يهدف هذا الكتاب التعليمي
لمي إلى تبليغ فَهمٍ دقيق لمصطلحات المنطق المعاصر الصورية، وإلى تطوير طرائق استدلال صوريٍ ملائمة،
وصًا الاستنباط الطبيعيّ، وطرق دمج الترميز المعاصر. ويزيد من طابعه التعليميّ تضمُّنُه لَمحاتٍ تاريخيةً في أغلب
صول، وأجوبةً منتقاة عن التمارين الخاصة بكل فصل. لقد تطوَّر هذا الكتاب خلال طبعاته المتتالية سعيًا
سيطِ والبتِّ في النقاشات والمفارقات المنطقية والرياضية.

ISBN 978-603-91637-4-9


الطبعة الأولى: 2023

معنى
MANA